

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

21. Band, Heft 3

20. Oktober 1939

S. 97—144

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Die wissenschaftliche Sprache. Vierter internationaler Kongreß für Einheit der Wissenschaft, Cambridge 1938. Erkenntnis 7, H. 3, 135—246 (1938).

Das Heft enthält die Vorträge, die für den 4. Kongreß für Einheit der Wissenschaft, welcher vor allem die „wissenschaftliche Sprache“ behandelte, vorgelegt wurden. Neben einleitenden kurzen Angaben über den 3. bis 5. Kongreß wird das Gesamtthema der Einheit der Wissenschaft in Beiträgen von O. Neurath und E. Walter behandelt. — Mathematik und mathematische Logik kommen in mehreren Beiträgen zu Wort. Hadamard weist auf die Mehrdeutigkeit der Verwendung mancher wichtiger mathematischer Termini hin. K. Dürr beschäftigt sich mit der Deutung von Boethius' *De syllogismo hypothetico* und Abaelards *Dialectica* (insbesondere ihrer implikativen Termini) im Sinne der modernen Aussagenlogik und mit der Klassifikation ihrer Schlüsse. K. Reach zeigt einen Weg zu einer formal „harmlosen“ Symbolisierung semantischer Antinomien unter Heranziehung der Beziehung einer Carnap-„Sprache“ zu ihrer arithmetisierten Syntax. Eine Verallgemeinerung des Carnapschen Sprachbegriffs betrifft der Vortrag von O. Helmer, während C. G. Hempel einen Formalisierungsansatz der Wahrscheinlichkeit und M. Strauß einen solchen der Mechanik vorführen. Die Physik ist weiter durch einen Überblick von van Dantzig über seine geometrisierungsfreien Begründungen der Physik vertreten. Außer Beiträgen vorwiegend psychologischen Inhalts (Grelling-Oppenheim, Gomperz, Mannoury, Ness, Woodger) gibt es noch zwei Vorträge (Rougier, Williams), die sich von ihren philosophischen Standpunkten aus kritisch mit an das Thema des Kongresses anschließenden Fragen auseinandersetzen.

Arnold Schmidt (Marburg a. d. L.).

● **Bense, Max: Geist der Mathematik. Abschnitte aus der Philosophie der Arithmetik und Geometrie.** München u. Berlin: R. Oldenbourg 1939. 173 S. u. 4 Taf. geb. RM. 4.80.

Ein Streifzug durch Hauptprobleme der Philosophie der Mathematik in populärer Darstellung. Einige Kapitelüberschriften: „Das Irrationale in der Mathematik“, „Mathematik und Ästhetik“, „Intuitionismus, Logizismus und Formalismus“.

Gerhard Gentzen.

MacLane, Saunders: Club topics. Symbolic logic. Amer. Math. Monthly 46, 289—296 (1939).

Verf. umreißt verschiedene Fragestellungen aus der mathematischen Logik und Grundlagenforschung, die sich für die Behandlung in mathematischen Vereinen u. dgl. eignen, und gibt Hinweise auf allgemeinverständliche zugehörige Literatur.

Gerhard Gentzen (Göttingen).

Turing, A. M.: Systems of logic based on ordinals. Proc. London Math. Soc., II. s. 45, 161—228 (1939).

Unter einer zahlentheoretischen Aussage versteht Verf. eine Aussage der Form: „ $\theta(x)$ verschwindet für unendlich viele natürliche Zahlen x “, wo $\theta(x)$ „primitiv rekursiv“ ist. Hierunter fallen syntaktische Sätze formaler Theorien. Unter Zugrundelegung des Churchschen Konversionskalküls kann jeder zahlentheoretischen Aussage \mathfrak{A} zugeordnet werden eine Behauptung: „ $A(n)$ conv 2 für jedes n “ (kurz: „ A ist dual“) für eine gewisse Formel A , die durch \mathfrak{A} bestimmt ist. Eine Formel L heißt eine Logik, wenn aus $L(A)$ conv 2 folgt, daß A dual ist. Die Menge der A mit $L(A)$ conv 2 heißt der Bereich von L . Verf. gibt eine exakte Definition des Begriffs „Die Formel Ω ist eine Ordinalformel“, der, inhaltlich gesprochen, aussagt, daß Ω eine berechenbare Teilmenge von natürlichen Zahlen wohlordnende berechenbare Relation beschreibt. Die Formel A heißt eine Ordinallogik, wenn $A(\Omega)$ für jede Ordinalformel Ω eine Logik ist. A heißt vollständig, wenn es zu jeder dualen Formel A eine Ordinalzahl Ω_A gibt, so daß $(A(\Omega_A))(A)$ conv 2. Eine Konsequenz des Gödelschen Satzes ist die Nicht-

existenz vollständiger Logiken (deren Bereich die Menge aller dualen Formeln wäre). Dagegen zeigt Verf., daß es vollständige Ordinallogiken gibt. Das Nichtkonstruktive bei der Verwendung einer vollständigen Ordinallogik liegt darin, daß es keine generelle Methode gibt, zu entscheiden, ob eine vorgelegte Formel eine Ordinalformel ist. — Verf. diskutiert ausführlich einige Ordinallogiken, insbesondere eine, die durch Betrachtung der Gentzenschen Methode des Widerspruchsfreiheitsbeweises der Zahlentheorie gewonnen wird. Eine wichtige für Ordinallogiken erklärte Eigenschaft ist die der Invarianz. \mathcal{A} heißt invariant, wenn für je zwei dieselbe Ordinalzahl darstellende Ordinalformeln Ω_1 und Ω_2 der Bereich von $\mathcal{A}(\Omega_1)$ mit dem von $\mathcal{A}(\Omega_2)$ übereinstimmt. Ist \mathcal{A} vollständig, so nicht invariant. *Hermes (Bonn).*

Robinson, Abraham: On the independence of the axioms of definiteness (Axiome der Bestimmtheit). J. Symbolic Logic 4, 69—72 (1939).

Verf. zeigt, daß unter Zugrundelegung der Axiome II—VII der Mengenlehre [vgl. A. Fraenkel, J. reine angew. Math. 155, 129—158 (1926)], zu welchen noch das Ersetzungsaxiom hinzugenommen werden kann, die Aussage

$$(x)(y)(z) : \varepsilon(x, y) \cdot \varepsilon(y, z) \cdot \supset \cdot \varepsilon(x, z)$$

unabhängig ist, wenn man die Identität durch die Definition $x = y \equiv \varepsilon(x, y) \cdot \varepsilon(y, x)$ einführt; erklärt man diese aber durch $x = y \equiv \varepsilon(x, y) \cdot \varepsilon(y, x)$, so ist $(x)(y)(z) : \varepsilon(x, y) \cdot \varepsilon(y, z) \cdot \supset \cdot \varepsilon(x, z)$ unabhängig. *Hermes (Bonn).*

Vredenduin, P. G. J.: A system of strict implication. J. Symbolic Logic 4, 73—76 (1939).

Verf. modifiziert das Axiomensystem der „strict implication“ von Lewis und Langford (Symbolic Logic, New York 1932) und zeigt, daß in dem neuen System die Sätze „ $\sim \Diamond \sim p \prec \cdot q \prec p$ “ und „ $\sim \Diamond p \prec \cdot p \prec q$ “ nicht mehr ableitbar sind. Die Gültigkeit dieser Sätze ist nach Verf. nicht vereinbar mit der Äquivalenz der Beziehungen: „ $p \prec q$ “ und „ q ist aus p ableitbar“. *Hermes (Bonn).*

Langford, C. H.: A theorem on deducibility for second-order functions. J. Symbolic Logic 4, 77—79 (1939).

Verf. erweitert ein früheres Ergebnis [Some theorems on deducibility I. Ann. of Math. 28, 16—40 (1927)], welches (im wesentlichen) besagt, daß jede Aussage der ersten Stufe, in den Grundbegriffen eines eine dichte Anordnung ohne extreme Elemente definierenden Axiomensystems, mit Hilfe dieser Axiome entscheidbar ist. Adjungiert man zu diesem Axiomensystem die „Dedekindsche Bedingung“, daß jede Klasse Φ , die Unterklasse eines Dedekindschen Schnittes ist [symbolisch: $H(\Phi)$], ein Schnittelement definiert, so ist jetzt auch jedes Element einer vom Verf. angegebenen Menge von Aussagen, die in der Verbindung $H(\Phi)$ auftretende Φ quantifiziert enthalten, entscheidbar (deshalb, weil man Aussagen über solche Φ durch Aussagen über die durch sie definierten Schnittelemente ersetzen kann). *Hermes (Bonn).*

Braithwaite, R. B.: Two ways of definition by verification. Erkenntnis 7, 281—287 (1938).

Rosser, Barkley: Definition by induction in Quine's new foundations for mathematical logic. J. Symbolic Logic 4, 80—81 (1939).

Verf. beweist, daß in Quines System (New Foundations for mathematical logic; dies. Zbl. 16, 193; vgl. auch Rosser, dies. Zbl. 20, 194) es (anschaulich gesprochen) zu jedem Funktionenpaar Φ und Ψ ein θ gibt, mit $\theta(0, y_1, \dots, y_s) = \Phi(y_1, \dots, y_s)$ und $\theta(n+1, y_1, \dots, y_s) = \Psi(\theta(n, y_1, \dots, y_s), n, y_1, \dots, y_s)$. So ergibt sich speziell die Existenz eines θ , welches die Elemente: $A, [A], [[A]]$ aufzählt, während in dem Quineschen System bisher die Existenz einer unendlichen Menge nicht bewiesen werden konnte. *Hermes (Bonn).*

Mordoukhay-Boltovskoy, D.: Sur les syllogismes en logique et les hypersyllogismes en métalogue. Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. s. 10, 161—172 (1938).

Verf. will die (Aristotelische) Klassenlogik, die Beziehungen zwischen Art und Gattung behandelt, verallgemeinern zu einer „Metalogik der Hyperklassen“, die es

mit Beziehungen zwischen Art, Gattung und „Hypergattung“ zu tun hat, und gibt Verallgemeinerungen der klassischen Schlußformeln („Barbara, . . .“), zu deren Bedeutung er sich jedoch wenig äußert.
Hermes (Bonn).

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

Foussianis, Chr. G.: Über eine Binomialkoeffizienten-Identität. Math. Ann. 116, 749—751 (1939).

Setzt man $P_{n,k} = \sum_{e_1 + \dots + e_n = k} 1^{e_1} 2^{e_2} \dots n^{e_n}$, so gilt $\sum_{p=1}^n (-1)^p p^{n+k} \binom{n}{p} = (-1)^n n! P_{n,k}$, sowie für beliebiges α und ε

$$\sum_{e_1 + \dots + e_{n+1} = k} \alpha^{e_1} (\alpha + \varepsilon)^{e_2} \dots (\alpha + n\varepsilon)^{e_{n+1}} = \sum_{p=0}^k \binom{n+k}{k-p} P_{n,p} \alpha^{k-p} \varepsilon^p.$$

Reichardt (Leipzig).

Rohrbach, Hans: Vereinfachter Beweis eines Identitätssatzes für Polynome. J. reine angew. Math. 180, 189—190 (1939).

Den fragl. Satz s. dies. Zbl. 16, 99. Der frühere Beweis des Verf. wird wesentlich vereinfacht. Dabei ergibt sich noch, daß es genügt, $N \geq 2^{m+1} - 2$ zu nehmen; in der ersten Formulierung hieß es $N \geq 2^{\alpha-1}(2^{m+1} - 3)$. Grunwald (Göttingen).

Mahanti, R., and D. N. Sen: Generalizations on partial fractions in determinantal forms. Amer. Math. Monthly 46, 275—279 (1939).

H. W. Turnbull [Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 1, 49—54 (1927)] has given a formula in determinant form for the expression of a proper fraction $f(x)/Q(x)$ as a sum of partial fractions. The authors describe a modified process which is simpler when $Q(x)$ has purely imaginary roots.
MacDuffee (Madison).

Browne, E. T.: Limits to the characteristic roots of a matrix. Amer. Math. Monthly 46, 252—265 (1939).

This paper lists and compares the various limits which have been given for the characteristic roots of a matrix. The theorems of Bendixson, Hirsch, Bromwich, Pick, Parker and the author are compared, and modified proofs are given.
MacDuffee (Madison).

Petr, K.: Remarque sur les formes quadratiques. Čas. mat. fys. 68, 162—172 u. franz. Zusammenfassung 173 (1939) [Tschechisch].

Es sei $Q = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k$ eine reelle quadratische Form; Δ_r sei die aus den r ersten Zeilen und Spalten der Matrix $\|a_{ik}\|$ gebildete Determinante; es sei $\Delta_n \neq 0$. Sind alle Glieder der Folge (1) $\Delta_0 = 1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ von Null verschieden, so ist die Anzahl ν der negativen Quadrate in der kanonischen Gestalt der Form Q bekanntlich gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in (1). Verf. gibt ein Verfahren an, welches gestattet, ν auch dann zu berechnen, wenn einige Glieder in (1) verschwinden, z. B.: ist $\Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = \Delta_{r+2} = \Delta_{r+3} = 0, \Delta_{r+4} \neq 0$, so ersetze man bei der Berechnung der Anzahl der Zeichenwechsel den Abschnitt $\Delta_r, \Delta_{r+1}, \dots, \Delta_{r+4}$ in (1) durch $\Delta_r, [r+2], -\Delta_{r+4}, \Delta_{r+4}$; dabei bedeutet $[r+2]$ die aus Δ_{r+2} durch Weglassen der $(r+1)$ -ten Zeile und Spalte entstehende Determinante (ist $[r+2] = 0$, so ist notwendig $\Delta_r \Delta_{r+4} > 0$).
Jarník (Prag).

Williamson, John: Normal matrices over an arbitrary field of characteristic zero. Amer. J. Math. 61, 335—356 (1939).

Let the coefficient field K in what follows be a field of characteristic 0, with an automorphism: $a \mapsto \bar{a}$, of period 1 or 2. Let $H = (h_{ij})$ be hermitian or anti-hermitian: $H^* = (\bar{h}_{ji}) = \varepsilon H$, $\varepsilon = 1$ or -1 , resp. A matrix A is normal with respect to H , i. e., H -normal, if there is a polynomial $f(x)$ such that $AH = Hf(A^*)$. Two matrices

A_1, A_2 are H -equivalent if, for a non-singular P , $PHP^* = H$, $PA_1P^{-1} = A_2$. Then $A_1H = Hf(A_1^*)$ implies $A_2H = Hf(A_2^*)$. The author seeks criteria for the H -equivalence of two H -normal matrices. [For K the complex field, see Williamson, Amer. J. Math. **60**, 355—374 (1938); this Zbl. **19**, 7]. By a previous theorem (l. c. p. 360) the problem is reduced to that of finding a canonical form for a matrix $S = \varepsilon S^*$ under conjunctive transformations by matrices C commutative with an S -normal matrix Q : $CQ = QC$, $CSC^* = S_1$, $QS = Sf(Q^*)$. Q may be taken in diagonal block form $Q = [Q_1, Q_2, \dots, Q_k]$, where the blocks correspond to the powers of the irreducible factors $p_i(x)$ of the characteristic function of Q , and the Q_i in the Wedderburn canonical form (Lectures on Matrices, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **1934**, 123—124). Two cases arise according to the behavior with respect to $f(x)$ of the companion matrices p_i of the polynomials $p_i(x)$. In the simpler case the main result is: Let A be H -normal, $AH = Hf(A^*)$, and let the irreducible factors of the characteristic function of A be $p_i(x)$, $i = 1, \dots, k$. If $p_i(f(p_i^*)) \neq 0$, $i = 1, \dots, k$, there exists a non-singular matrix R such that

$$RAR^{-1} = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & f(F^*) \end{Bmatrix}, \quad RHR^* = \begin{Bmatrix} 0 & \varepsilon E \\ E & 0 \end{Bmatrix}, \quad E = \begin{Bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

where the degree of F is one half that of A and the same as that of E . F may be taken in the Wedderburn canonical form and then (1) is unique and completely determined by $f(x)$ and the invariant factors of A . The other case is more complicated and a similarly unique canonical form is not obtained. All results are said to hold for fields of characteristic $\neq 0, 2$, except when inseparability of the $p_i(x)$ occurs. *Hull*.

Touchard, J.: Sur une propriété de minimum attachée aux systèmes de numération. Bull. Sci. math., II. s. **63**, 167—172 (1939).

Une question relative à certains groupes de substitutions a conduit l'auteur à rechercher le maximum et le minimum de la forme linéaire $\omega = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + mx_m + \dots$, lorsque $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ sont des entiers variables ≥ 0 liés par la relation $ax_1 + a^2x_2 + \dots + a^mx_m + \dots = n$, où $a > 1$ et n , multiple de a , sont des entiers positifs donnés. — La forme ω est minimum lorsque $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ sont les chiffres successifs de l'expression de n dans le système de numération de base a , maximum pour $x_2 = x_3 = \dots = 0$, de sorte que la valeur du maximum est $x_1 = \frac{n}{a}$. *S. Bays* (Fribourg).

Engstrom, H. T.: On fundamental systems of symmetric functions. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 404—406 (1939).

Un sistema S di n polinomi dati in un corpo K , simmetrici in n variabili, si dice che forma un sistema fondamentale quando ogni funzione razionale in K , simmetrica nelle stesse n variabili, può essere espressa razionalmente nei polinomi di S . L'A., applicando un teorema di O. Perron sulla dipendenza algebrica di $n+1$ polinomi in n variabili, dimostra che: se il corpo K è di caratteristica zero, ogni sistema di n polinomi dati in K , simmetrici in n variabili e algebricamente indipendenti, forma un sistema fondamentale quando il prodotto dei loro gradi è minore di $2n!$. L'A. osserva anche che quando il prodotto dei gradi è $2n!$ il teorema non è più vero. *G. Dantoni*.

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

MacLane, Saunders: Some recent advances in algebra. Amer. Math. Monthly **46**, 3—19 (1939).

The author summarizes, in a non-technical way, the investigations reported at the conference on algebra, held at the University of Chicago in June, 1938. *Hull*.

Graves, L. M.: Extensions of algebraic systems to form fields. Amer. Math. Monthly **45**, 664—669 (1938).

Das Ziel der Arbeit ist, den Kern eines möglichst übersichtlichen Überganges von den natürlichen zu den rationalen Zahlen unter abstrakter Beschränkung auf die

wesentlichen Voraussetzungen herauszuschälen. — Als kommutative Halbgruppe bezeichnet der Autor einen Bereich mit einer eindeutigen, kommutativen, assoziativen und kürzbaren Verknüpfung. Wird die Existenz eines Nullelementes offengelassen und demgemäß die Wegkürzbarkeit nur für von Null verschiedene Elemente verlangt, so spricht er von einer „kommutativen Halbgruppe mit erlaubter Null“. In einem Bereich seien zwei Verknüpfungen derart definiert, daß I. die Addition eine kommutative Halbgruppe festlegt, wobei noch für $a \neq b$ entweder $a = b + c$ oder $b = a + c$ lösbar sei, II. die Multiplikation eine „kommutative Halbgruppe mit erlaubter Null“ festlegt, III. das distributive Gesetz gilt. Ein solcher Bereich wird durch zwei Halbgruppenerweiterungsprozesse zu einem Körper erweitert.

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Krull, Wolfgang: Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. VII. Inseparable Grundkörpererweiterung. Bemerkungen zur Körpertheorie. Math. Z. 45, 319—334 (1939).

Sei \mathfrak{R} ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich (Quotientenkörper \mathfrak{R}), K ein in \mathfrak{R} algebraisch abgeschlossener Unterkörper von \mathfrak{R} , A ein algebraischer Oberkörper von K und $\mathfrak{S} = A\mathfrak{R}$. Die wichtigsten Sätze über das Verhalten der \mathfrak{R} -Ideale beim Übergang zu \mathfrak{S} , die für separables A in Beitrag VI (s. dies. Zbl. 20, 340) bewiesen wurden, gelten auch für alle einfachen Erweiterungen A ; für beliebige Erweiterungen A dagegen nur, wenn \mathfrak{R} „streng transzendent über K “ ist, d. h. wenn für jeden algebraischen Oberkörper M von K stets M algebraisch abgeschlossen in $M\mathfrak{R}$ ist. Ein Beispiel, in dem \mathfrak{R} nicht streng transzendent über K ist, wird angegeben. — Sei \mathfrak{p} ein maximales Primideal von \mathfrak{R} . $\bar{A} = \mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ läßt sich dann als Oberkörper von K auffassen. Verf. beweist: Es liegen $[A \cap \bar{A} : K]$ verschiedene Primideale von \mathfrak{S} über \mathfrak{p} , falls A (ohne wesentliche Einschränkung) separabel normal über K ist, und $\mathfrak{p}\mathfrak{S}$ ist gleich dem Durchschnitt dieser Primideale, falls der größte über K algebraische Unterkörper \bar{M} von \bar{A} separabel über K und \bar{A} streng transzendent über \bar{M} ist, sogar bei beliebigem A . — Es folgen rein körpertheoretische Sätze, u. a.: Genau dann ist jede transzendente Erweiterung von K streng transzendent, wenn jede endlich algebraische Erweiterung von K einfach ist.

Lorenzen (Bonn).

MacLane, Saunders: Modular fields. I. Separating transcendence bases. Duke math. J. 5, 372—393 (1939).

Das Hauptproblem lautet: Unter welchen Bedingungen besitzt ein algebraischer Erweiterungskörper K von L eine separierende Transzendenzbasis (sep. Tb.), d. h. eine solche algebraisch-unabhängige Menge T , daß K separabel algebraisch über $L(T)$ wird? Bisher waren solche Bedingungen nur für vollkommene Grundkörper bekannt (F. K. Schmidt, v. d. Waerden, Albert und MacLane); jetzt wird der unvollkommene Fall behandelt, wobei der Teichmüllersche Begriff der p -Unabhängigkeit die Hauptrolle spielt. Notwendig für die Existenz einer sep. Tb. von K/L ist nämlich, daß die Erweiterung K/L die p -Unabhängigkeit erhält, d. h. daß jede p -unabhängige Menge in L auch in K p -unabhängig bleibt. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für Erhaltung der p -Unabhängigkeit angegeben. Hat nun K über L eine endliche Transzendenzbasis T , so ist notw. und hinr. für die Existenz einer sep. Tb., daß K/L die p -Unabhängigkeit erhält und daß es eine Zahl e gibt, so daß $L(K^{p^e})$ separabel über $L(T)$ ist. Diese Bedingung ist z. B. dann erfüllt, wenn K durch Adjunktion einer endlichen Menge an L entsteht; bei unendlichen Adjunktionen ist sie nicht immer erfüllt, wie durch ein Beispiel gezeigt wird. Als Folgerungen werden Bedingungen angegeben, die gewährleisten, daß alle Zwischenkörper Z zwischen L und K eine sep. Tb. besitzen oder daß K über Z eine solche besitzt. Wenn K über L eine sep. Tb. besitzt, so umfaßt L den maximalen vollkommenen Unterkörper von K . Die Arbeit enthält noch eine Bemerkung über reine Formen $b_1 x_1^q + b_2 x_2^q + \dots + b_m x_m^q$, die den Wert 0 nicht trivial annehmen.

van der Waerden (Leipzig).

Hall, Marshall: A type of algebraic closure. Ann. of Math., II. s. **40**, 360—369 (1939).

Let S be a set of vectors $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_n)$ over an algebra \mathfrak{A} . A vector $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_n)$

is called a left, or right, annihilator of S if $\sum_{i=1}^n a_i x_i$, or $\sum_{i=1}^n x_i a_i = 0$, for every \mathfrak{x} in S . The totalities S^l and S^r , of such left and right annihilators, resp., are evidently left and right vector-ideals over \mathfrak{A} , resp. If S is a left, or right, vector-ideal over \mathfrak{A} , then $\bar{S}^l = S^{rl} = (S^r)^l$, and $\bar{S}^r = S^{lr} = (S^l)^r$, are called the left, and right, closures of S , and S is said to be closed if $\bar{S}^l = S$, or $\bar{S}^r = S$, resp. The algebra \mathfrak{A} is said to be strongly closed if every vector-ideal over \mathfrak{A} is closed, and weakly closed if every ideal of \mathfrak{A} , i. e., vector-ideal of length 1, is closed. The author proves that a weakly closed \mathfrak{A} has a unit and that weak closure implies strong closure. In particular, a semi-simple algebra is closed and, more generally, an algebra is closed if and only if the ideals of its radical are closed. Various lattice (structure) properties are also proved. *Hull* (British Columbia).

Eichler, M.: Zur Einheitentheorie der einfachen Algebren. Comment. math. helv. **11**, 253—272 (1939).

The author has previously indicated connections between the unit groups H of maximal orders of simple algebras A/k , k an algebraic number field, and the fundamental groups of certain topological manifolds. [See Eichler, Math. Ann. **114**, 635—654 (1937); this Zbl. **17**, 244. Also, Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **47**, 198 (1938); this Zbl. **18**, 102]. These connections are further developed and exploited here, and, in particular, the case of a non-division algebra is included. The principal theorem describes the construction, in terms of subgroups of H , of all manifolds R of least dimension, for which a certain subgroup of H is isomorphic to the fundamental group. It states further that this least dimension is

$$r = r_1 n(n+1)/2 + r_2 n^2 + r_3 n(n-1)/2 - 1, \quad (1)$$

where n is the degree of A over its centre Z , $r_1 + r_3$ is the number of real infinite prime spots, i. e., real conjugates, of Z , r_3 is the number of these over which A is ramified, and $2r_2$ is the number of imaginary conjugates of Z . In case $A=Z$, i. e., $n=1$, $r_3=0$, (1) reduces to the Dirichlet generator number for the unit group of the algebraic number field Z . Thus the theorem is a natural extension of Dirichlet's. When A/k is a total matrix algebra, the unit group is the unimodular group and the theorem includes known results of Minkowski concerning the reduction theory of quadratic forms. Some remarks concerning the possibility of finding further topological invariants of the groups are made. The ζ -function has led to such in the case of quaternion algebras.

Hull (British Columbia).

Zahlentheorie:

Ducci, Enrico: Una crittografica numerazione. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. **75**, 157—160 (1939).

Ward, Morgan: A note on divisibility sequences. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 334—336 (1939).

A sequence of rational integers $(u) : u_0, u_1, u_2, \dots$, is called a divisibility sequence if $u_r | u_s$ whenever $r | s$. If $u_i \neq 0$, $i > 0$, the numbers $[n, r] = u_n u_{n-1} \dots u_{n-r+1} / u_1 u_2 \dots u_r$, $r = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, are called the binomial coefficients associated with (u) . The author proves the theorem: If there exists a sequence (v) of rational integers such that $v_i \neq 0$, $i > 0$, and $u_n = \prod_{d|n} v_d$, then (u) is a div. seq. and the associated $[n, r]$ are rational integers. He indicates an application of the theorem to Lucasian sequences (this. Zbl. **19**, 149) and proves a further property of such (u) . *Hull*.

Vandiver, H. S.: On analogues of the Bernoulli and allied numbers. Proc. nat. Acad. Sci., Wash. **25**, 197—201 (1939).

The author announces further results concerning his generalizations of the numbers of Bernoulli and Euler [see Vandiver, Proc. nat. Acad. Sci., USA. **23**, 555—559

(1937); this Zbl. 17, 341]. These include, among others: (1) an analogue of the von Staudt-Clausen theorem, related to the multinomial theorem, and verifying his earlier conjecture (l. c.); (2) generalizations of known formulas relating to Euler polynomials; (3) congruential relations modulo prime powers. *Hull* (British Columbia).

Corput, J. G. van der: Sur quelques systèmes de congruences. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 42, 328—335 (1939).

Verf. betrachtet Systeme von Kongruenzen $\psi_\mu(y_1, \dots, y_s) \equiv 0 \pmod{p^\beta}$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$), wo die ψ_μ Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten sind, $s \geq m$ und p Primzahl ist. Ist dann $p^{(s-m)\beta} Q_\beta$ die Anzahl der Lösungen dieses Kongruenzensystems, so gilt: Wenn es eine ganze Zahl $\gamma \geq 0$ gibt derart, daß für jede Lösung des Kongruenzensystems mit $\beta = 2\gamma + 1$ der Rang der Funktionalmatrix M der ψ_μ gleich m und der letzte Elementarteiler mod p von M höchstens gleich p^γ ist, so hat Q_β denselben Wert für alle $\beta \geq 2\gamma + 1$. Dieser Satz verallgemeinert weitgehend ein Resultat von L. K. Hua, der den Spezialfall $m = s = 1$ bewiesen und zur Abschätzung einer Exponentialsumme, wie sie neuerdings für die additive Zahlentheorie von Bedeutung sind, benutzt hat (dies. Zbl. 18, 294). Verf. beweist seinen Satz gleich in noch allgemeinerer Form und leitet schließlich eine für die additive Zahlentheorie nützliche Folgerung daraus ab.

Rohrbach (Göttingen).

Yates, F., and R. W. Hale: The analysis of latin squares when two or more rows, columns, or treatments are missing. J. Roy. Statist. Soc. 6, Suppl., 67—79 (1939).

Die Aufstellung des Systems der Normalgleichungen und deren Lösung nach der Methode der sukzessiven Näherungen wird allgemein und an numerischen Beispielen gezeigt. Eine Bemerkung über „Youden“-sche Quadrate schließt an. In einem Anhang wird die Frage der Lösung untersucht, wenn überflüssige Konstanten eingeführt wurden.

F. Knoll (Wien).

Tweedie, M. C. K.: A graphical method of solving tartaglian measuring puzzles. Math. Gaz. 23, 278—282 (1939).

The problem is: to divide the 8 pints of water contained by a vessel of 8 pints capacity into two equal parts by using only two other vessels of capacity 3 and 5. Let x, y, z be the amounts of water the vessels contain, then $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 5, x + y + z \leq 8$; x, y, z are taken as trilinear coordinates of a point with respect to an equilateral triangle of altitude 8. The puzzle is then changed into a graphical one.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Pepper, Paul Milton: Une application de la géométrie des nombres à une généralisation d'une fraction continue. Ann. École norm., III. s. 56, 1—70 (1939)

Es seien $\xi = \xi(x_1, x_2, x_3), \eta = \eta(x_1, x_2, x_3), \zeta = \zeta(x_1, x_2, x_3)$ drei reelle Linearformen, mit nichtverschwindender Determinante. In jedem Gitterpunkte, außer in $O = (0, 0, 0)$, sei $\xi \neq 0, \eta \neq 0, \zeta \neq 0$. Ein Parallelepiped $\mathfrak{P}: |\xi| \leq a, |\eta| \leq g, |\zeta| \leq l$ heiße extrem, wenn in seinem Inneren kein Gitterpunkt außer O liegt, wenn aber jede seiner 2-dimensionalen Seiten einen (also genau einen) Gitterpunkt im Inneren enthält; liegen diese sechs Gitterpunkte in einer Ebene (die dann notwendig O enthält), so heiße \mathfrak{P} ein Parallelepiped zweiter Art, sonst erster Art. Minkowski (Ges. Abh. I, 281—282) hat ohne Beweis einen Satz angegeben, der die Gesamtheit von allen extremen Parallelepipeden beschreibt, und einen Algorithmus angegeben, der, von einem beliebigen extremen Parallelepiped 1. Art ausgehend, alle extremen Parallelepipede nach und nach zu bestimmen gestattet. Verf. gibt ausführliche Beweise dieser Resultate [vgl. auch M. Zeisel, Zur Minkowskischen Parallelepipedapproximation. S.-B. Akad. Wiss. Wien 126 (1927)]. Darüber hinaus leitet Verf. einen Algorithmus für die Konstruktion von Folgen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$ extremer Parallelepipede 1. Art ab, die folgendermaßen beschaffen sind: \mathfrak{P}_1 ist beliebig. Aus $\mathfrak{P}_i: |\xi| \leq a_i, |\eta| \leq g_i, |\zeta| \leq l_i$ konstruiere man \mathfrak{P}_{i+1} wie folgt: Es sei P_i der Gitterpunkt mit $\zeta(P_i) = l_i, |\xi(P_i)| = c_i < a_i, |\eta(P_i)| = h_i < g_i$. Unter allen Gitterpunkten P mit $|\xi(P)| < c_i, |\eta(P)| < h_i$ sei P_{i+1} derjenige mit möglichst kleinem $\zeta(P_{i+1}) > 0$; man setze $l_{i+1} = \zeta(P_{i+1})$; durch geeignete

Vergrößerung von c_i bekommt man ein neues extremes Parallelepipid $\mathfrak{P}_{i+1}: |\xi| \leq a_{i+1}, |\eta| \leq g_{i+1}, |\zeta| \leq l_{i+1}$ ($a_{i+1} > c_i, g_{i+1} = h_i, l_{i+1} > l_i$). Sollte \mathfrak{P}_{i+1} von 2. Art sein, so vergrößere man h_i statt c_i , was dann sicher zu einem \mathfrak{P}_{i+1} von 1. Art führt. Es ist $l_{i+t} > 2^{\lfloor \frac{t}{4} \rfloor} l_i, a_{i+t} g_{i+t} < 5 a_i g_i 2^{-\lfloor \frac{t}{4} \rfloor}$. Die Folge von Gitterpunkten P_1, P_2, \dots führt auch leicht zu Gitterpunkten $P \neq O$ mit beliebig kleinen Werten von $|\xi(P)| + |\eta(P)|$.
Jarník (Prag).

Pipping, Nils: Über konvexe Figuren K₇. Acta Acad. Åboens. 11, Nr 1, 1—19 (1939).

Es sei K eine beliebige ebene konvexe Figur mit dem Punkt $(0, 0)$ als Mittelpunkt und mit dem Inhalt J . Ferner sei F_v die kleinste positive Zahl, die folgende Eigenschaft hat: Es gibt v Gitterpunkte $(x_i, y_i) \neq (0, 0)$ ($i = 1, 2, \dots, v$) mit lauter verschiedenen Verhältnissen x_i/y_i so, daß der Punkt $(x_i/F_v, y_i/F_v)$ für $i = 1, 2, \dots, v$ in K (der Rand eingeschlossen) liegt. Der Verf. beweist die Relation $JF_1F_7 \leq 10$ und zeigt, daß die obere Grenze 10 erreichbar ist.
Vl. Knichal (Prag).

Mahler, Kurt: Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen. Čas. mat. fys. 68, 85—92 (1939).

Verf. beweist zuerst den folgenden Satz: Seien $f_h(x) = \sum_{k=1}^n a_{hk} x_k, g_h(x) = \sum_{k=1}^n b_{hk} x_k$ zwei Linearformensysteme mit reellen Koeffizienten, das letzte mit der Determinante $d = |b_{hk}| \neq 0$. Die Bilinearform $\sum_{i=1}^n f_i(x) g_i(y)$ habe in $x_h y_k$ lauter ganze rationale Koeffizienten. Es sei $t_1 > 0, \dots, t_n > 0$, und es gebe einen Gitterpunkt $x = (x_1, \dots, x_n)$ so, daß $|f_1(x)| = t_1, |f_2(x)| \leq t_2, \dots, |f_n(x)| \leq t_n$ ist. Dann gibt es einen Gitterpunkt $y \neq 0$ so, daß $|g_1(x)| \leq (n-1) \lambda / t_1, |g_i(x)| \leq \lambda / t_i$ ($i = 2, 3, \dots, n$) mit $\lambda > 0, \lambda^{n-1} = |d| t_1 t_2 \dots t_n$ ist. — Ferner folgen einige Anwendungen dieses Satzes, besonders eine Ableitung des Khintchineschen Übertragungssatzes. Im zweiten Teile wird unter der Voraussetzung, daß a_{hk}, b_{hk} p -adisch sind, ein ähnlicher Satz bewiesen und daraus ein p -adisches Analogon zum Khintchineschen Satz abgeleitet.
Vl. Knichal.

Mahler, Kurt: Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper. Čas. mat. fys. 68, 93—102 (1939).

Seien $F(x)$ und $G(x)$ die Distanzfunktionen zweier in bezug auf die Einheitskugel polaren n -dimensionalen konvexen Körper K und K' mit den Mittelpunkten im Ursprung und mit den Inhalten J und J' . Die Zahlen $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ (sukzessive Minima des Körpers K) seien durch folgende Eigenschaft definiert: Es gibt n linear unabhängige Gitterpunkte $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ mit $F(x^{(i)}) = \sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) so, daß σ_1 das Minimum von $F(x)$ in allen Gitterpunkten $x \neq 0$ und σ_i für $i \geq 2$ das Minimum von $F(x)$ in allen von $x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)}$ linear unabhängigen Gitterpunkten ist. Ähnlich seien τ_1, \dots, τ_n die sukzessiven Minima des Körpers K' . Dann ist $4^n / (n!)^2 \leq JJ' \leq 4^n, 1 \leq \sigma_i \tau_{n-i+1} \leq (n!)^2$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Aus diesem Übertragungssatz folgen einige Ergebnisse der vorstehenden Abhandlung.
Vl. Knichal (Prag).

Jarník, Vojtěch: Remarque à l'Article précédent de M. Mahler. Čas. mat. fys. 68, 103—111 (1939).

Seien θ_{ij} ($1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$) rs beliebige reelle Zahlen. Für reelle $t > 0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ setzen wir $\psi_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) = \min \left(\max_{1 \leq i \leq r} |\theta_{i1} a_1 + \dots + \theta_{is} a_s + a_{i+s} + \alpha_i| \right), \psi_2(t) = \min \left(\max_{1 \leq j \leq s} |\theta_{1j} b_{s+1} + \dots + \theta_{rj} b_{s+r} - b_j| \right)$ (a, b durchlaufen die ganzen Zahlen mit $0 < \max_{1 \leq j \leq s} |a_j| \leq t, 0 < \max_{1 \leq i \leq r} |b_{s+i}| \leq t$). Es sei $\varepsilon > 0, \varphi(t)$ für $t > 0$ eine stetige, $\varphi(t)t^{-\varepsilon}$ ins Unendliche wachsende und $\varrho(t)$ die zu $\varphi(t)$ inverse Funktion. Der Verf. beweist mit Hilfe der Ergebnisse von Mahler (siehe vorst. Ref.) folgende Sätze (sogar etwas mehr): Aus $\liminf_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \psi_2(t) > 1$ folgt $\limsup_{t \rightarrow \infty} \varrho(t) \psi_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) \leq ((r+s)!(r+s))^{(\varepsilon+1)/\varepsilon}$ für jedes System $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Aus $\liminf_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \psi_2(t) < \infty$ folgt $\limsup_{t \rightarrow \infty} \varrho(t) \psi_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) > 0$ für fast alle Systeme $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.
Knichal.

Moessner, Alfred: Einige unbestimmte Gleichungen und numerische Identitäten. Tôhoku Math. J. 45, 310—323 (1939).

Moessner, Alfred: Einige diophantische Gleichungen und numerische Identitäten. Bull. Calcutta Math. Soc. 31, 25—30 (1939).

Morin, Ugo: Un problema d'analisi indeterminata di terzo grado. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 1, 201—205 (1939).

Es wird die Gesamtheit der rationalen Lösungen von $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0$ mittels rationaler Zahlen dargestellt. In den Beweisen werden einfache Hilfsmittel der analytischen Geometrie benutzt. *Hofreiter* (Wien).

Ward, Morgan: Note on the general rational solution of the equation $ax^2 - by^2 = z^3$. Amer. J. Math. 61, 788—790 (1939).

Die rationalen Lösungen der diophantischen Gleichung $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \dots + a_m y^m = z^n$ werden durch rationale Parameter u, v dargestellt, vorausgesetzt, daß $(m, n) = 1$ ist: $x = u(a_0 u^m + \dots + a_m)^k v^n$, $y = (a_0 u^m + \dots + a_m)^k v^n$, $z = (a_0 u^m + \dots + a_m)^l v^m$ mit $1 + km = ln$. Darin ist die von Fogels angegebene Parameterdarstellung der rationalen Lösungen von $ax^2 - by^2 = z^3$ (dies. Zbl. 19, 6) enthalten. *Reichardt* (Leipzig).

Lind, Carl-Erik: Kubische Kurven mit gerader Anzahl exzeptioneller Punkte. (Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 201—206 (1939).

Der Verf. bestimmt die Gleichungen der ebenen kubischen Kurven mit rationalen Koeffizienten und mit n exzeptionellen Punkten in den Fällen $\frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \frac{8}{n}, \frac{6}{n}, \frac{12}{n}, \frac{10}{n}$ und gibt einige Beispiele von Kurven, welche nur solche rationalen Punkte, die gleichzeitig exzeptionell sind, besitzen. — Dabei versteht man unter einem System von exzeptionellen Punkten auf einer solchen Kurve das endliche System von rationalen Punkten, welches folgende Eigenschaft hat: die Tangente in jedem Punkte dieses Systems soll die Kurve nur in den Punkten desselben Systems durchschneiden.

V. Knichal (Prag).

Vandiver, H. S.: On Bernoulli's numbers and Fermat's last theorem. II. Duke math. J. 5, 418—427 (1939).

Fortsetzung von früheren (siehe dies. Zbl. 18, 5) Untersuchungen für die Exponenten 587 und 617. Erweiterung des Satzes 1. Zusammenhang mit dem zweiten Faktor der Klassenanzahl des Kreiskörpers. *N. G. W. H. Beeger* (Amsterdam).

Krasner, Marc: Sur le théorème de Fermat. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1468—1471 (1939).

Es sei n eine ungerade natürliche Zahl und k ein Zahlkörper, dessen Klassenzahl zu n prim ist. Verf. zeigt, daß die Gleichung $x^n + y^n + z^n = 0$ ($xyz \neq 0$) dann und nur dann in k lösbar ist, wenn $r(1-r) = \lambda^n$, $\lambda \neq 0$ in k lösbar ist. Im Falle, wo k der Körper der rationalen Zahlen und n eine ungerade Primzahl ist, wird hieraus gefolgert, daß die Gleichung $x^n + y^n + z^n = 0$ ($xyz \neq 0$) dann und nur dann in k lösbar ist, wenn es ganze rationale Zahlen z, M ($zM \neq 0$) gibt, für welche $z^2 - \rho^2 M$ positiv und das Ideal $(z^2 - \rho^2 M)$ in $k(\rho)$ das Quadrat eines Ideals P ist. Hier bezeichnet ρ die reelle n -te Wurzel von 2. *Cahit Arf* (Istanbul).

Selberg, Sigmund: Einige Bemerkungen über eine zahlentheoretische Funktion. (Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 161—164 (1939).

Verf. hatte bewiesen (dies. Zbl. 19, 393; Bezeichnungen werden von dort übernommen): Für $H(x; \Delta) = \sum_{n=1}^x \nu(n; \Delta) n^{-1}$ gilt $H(x; \Delta) = o(1)$, falls $|1 + \Delta| < 1$ und $|\Delta| \leq 1$ ist. Jetzt wird mit gleichen Mitteln gezeigt, daß dies auch ohne die Bedingung $|\Delta| \leq 1$ gültig bleibt. Ferner wird mit tiefer liegenden Mitteln die Abschätzung zu $H(x; \Delta) = O((\log x)^{1+|\Delta|-1})$ für $\Delta \neq -1$ verschärft. *Rohrbach* (Göttingen).

Davenport, H.: On Waring's problem for cubes. *Acta math.* **71**, 123—143 (1939).

The author proves the following theorem: Almost all positive integers are representable as the sum of four positive integral cubes. More precisely, the number of positive integers less than N which are not so representable is $O(N^{1-\frac{1}{3}+\varepsilon})$ for any $\varepsilon > 0$. Hardy and Littlewood proved that almost all positive integers are representable by five positive integral cubes. The improvement here is a consequence of the author's lemma: The number of solutions of $x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 = x_2^3 + y_2^3 + z_2^3$ in integers subject to $P \leq x_1, x_2 \leq 2P$, $P^{\frac{2}{3}} \leq y_1, z_1, y_2, z_2 \leq 2P^{\frac{2}{3}}$ is $O(P^{\frac{1}{3}+\varepsilon})$ für any $\varepsilon > 0$.
Wright (Aberdeen).

Erdős, P.: On the easier Waring problem for powers of primes. II. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **35**, 149—165 (1939).

The author proves that the density of each of the sets of integers

$$p_1^2 + p_2^2 - p_3^2, \quad \sum_{v=1}^4 p_v^3 - \sum_{\mu=1}^4 q_{\mu}^3, \quad \sum_{v=1}^{2^l} \varepsilon_v p_v^l \quad (\varepsilon_v = \pm 1)$$

is positive, where the p and the q are primes. It follows that a constant c_l exists such that every integer is the sum of at most c_l positive and negative l -th powers of primes. (I. see this *Zbl.* **16**, 102.)
Wright (Aberdeen).

Gruppentheorie, Verbände.

Stoll, R. R.: Fundamental regions for the simple group of order 60 in S_4 . *Bull. Amer. Math. Soc.* **45**, 326—329 (1939).

Piccard, Sophie: Sur les bases du groupe symétrique. *Čas. mat. fys.* **68**, 15—30 (1939).

Ein Paar S, T von Erzeugenden der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_n der Ordnung $n!$ heiße eine Basis von \mathfrak{S}_n ; zwei nicht konjugierte Basen heißen unabhängig. Die Anzahl der verschiedenen Basen von \mathfrak{S}_n ist ein Vielfaches von $n!/2$, falls $n \geq 3$ ist; für $n = 3, 4, 5, 6$ werden vollständige Systeme unabhängiger Basen für \mathfrak{S}_n aufgezählt.

Magnus.

Piccard, Sophie: Sur les bases du groupe symétrique et du groupe alternant. *Wiadom. mat.* **47**, 141—179 (1939).

Es werden viele Sätze über Paare von Substitutionen, welche die symmetrische bzw. alternierende Permutationsgruppe von n Ziffern erzeugen, aufgestellt, aus denen u. a. folgt, daß zu jeder von 1 verschiedenen Permutation von $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$ eine zweite gefunden werden kann, die mit ihr zusammen $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$ erzeugt, ausgenommen im Falle der \mathfrak{S}_4 , wo die Doppeltranspositionen in der Φ -Untergruppe enthalten sind, also sich nicht ergänzen lassen.

Zassenhaus (Hamburg).

Bundgaard, S.: Eine Verallgemeinerung des Kronecker-Weylschen Satzes über diophantische Approximationen. (*Helsingfors*, 23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 219—224 (1939).

Der Verf. hat den Kroneckerschen Approximationssatz und Weylschen Gleichverteilungssatz auf abelsche Gruppen verallgemeinert (s. dies. *Zbl.* **15**, 6). Er gibt einen Überblick über diese Untersuchungen, beschränkt sich aber dabei auf unabhängige Charaktere.

E. Hlawka (Wien).

Baer, Reinhold: Groups with abelian norm quotient group. *Amer. J. Math.* **61**, 700—708 (1939).

G sei eine (endliche oder unendliche) Gruppe, in der die Ordnungen aller Elemente Potenzen der Primzahl p sind. N sei ein Normalteiler derart, daß G/N abelsch ist, daß N nicht im Zentrum Z von G liegt, daß jedes Element von N mit jeder Untergruppe von G vertauschbar ist, und daß kein Element von G zusammen mit N eine hamiltonsche Gruppe erzeugt. Dann sind die Ordnungen der Elemente von N beschränkt; ihr Maximum sei p^m . N ist abelsch und die Ordnungen der Elemente des

Zentralisators C von N sind beschränkt; ihr Maximum sei p^{m+q} . Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen für je zwei Elemente von G

$$u^p v^p = (uv)^p \quad (1)$$

gilt. Für $p \neq 2, \neq 3$ ist das immer der Fall, für $p = 2$ oder 3 nicht immer. Ist (1) erfüllt, so ist C genau die Gesamtheit der Elemente u von G , für die $c(u) = u^{p^{m+q}}$ gleich 1 ausfällt. Nun wird, immer unter der Voraussetzung (1), die Gruppe $A = G/C$ der von G in N induzierten Automorphismen untersucht. A ist isomorph einer Untergruppe des Durchschnittes $D = Z \cap N$. Die Abbildung $g \rightarrow c(g)$ ist nämlich ein Homomorphismus von G und ein Isomorphismus von G/C . Die Faktorgruppe N/D ist zyklisch und ihre Ordnung gleich der maximalen Ordnung der Elemente von A . Für jedes x in N und g in G gilt $gxg^{-1} = x \cdot c(g)^{h(x)}$, wobei $h(x)$ nur von x abhängt. Der wichtigste Spezialfall ist der, daß N die Norm von G , d. h. die Gesamtheit der Elemente ist, die mit jeder Untergruppe vertauschbar sind. van der Waerden (Leipzig).

Dubuque, P.: Sur l'ordre d'un élément dans un groupe simple. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 5/6, 543—549 u. franz. Zusammenfassung 549—550 (1938) [Russisch].

Mit Hilfe der Burnsidischen Methode der Determinantenbildung monomialer Darstellungen und unter Benutzung des von Turkin eingeführten Begriffes der „Quasinormalisatoren“ wird bewiesen: Satz 1: A sei ein Element mit der Ordnung $2^k (k > 1)$ in der endlichen Gruppe \mathfrak{G} , $A^{2^{k-2}}$ sei nicht zu seinem Inversen konjugiert und der Normalisator von $A^{2^{k-1}}$ habe keine durch 2^{2k} teilbare Ordnung, dann besitzt \mathfrak{G} einen echten Normalteiler von 2-Potenzindex. Satz 2: A sei ein Element mit der Ordnung $2^k (k > 1)$, der Normalisator von $A^{2^{k-1}}$ möge mit dem von $A^{2^{k-1}}$ übereinstimmen und seine Ordnung nicht durch 2^{k+l} teilbar sein, dann besitzt \mathfrak{G} einen echten Normalteiler von 2-Potenzindex. Für beliebige Primzahl p gilt Satz 3: \mathfrak{P} sei eine p -Sylowgruppe von der Ordnung p^α , \mathfrak{H} sei der Durchschnitt von \mathfrak{P} mit dem Zentrum des Normalisators von \mathfrak{P} und habe die Ordnung p^k . H sei ein Element von der Ordnung p^l aus \mathfrak{H} , dessen Normalisator übereinstimmt mit dem Normalisator von $H^{p^{2-1}}$ und es sei $l > \alpha - k$. Dann besitzt \mathfrak{G} einen echten Normalteiler von p -Potenzindex.

Zassenhaus (Hamburg).

Weisner, Louis: Condition that a finite group be multiply isomorphic with each of its irreducible representations. Amer. J. Math. 61, 709—712 (1939).

„Eine notwendige und hinreichende Bedingung, daß eine endliche Gruppe G keine treue irreduzible Darstellung besitzt, ist die Bedingung, daß G eine eigentliche Untergruppe P enthält, deren Ordnung Potenz einer Primzahl p ist, so daß (1) P von den kleinsten Normalteilern von G mit p -Potenzordnung erzeugt wird und (2) jede Untergruppe vom Index p von P einen von 1 verschiedenen Normalteiler von G enthält.“ [Vgl. das kompliziertere Kriterium bei K. Shoda, Über direkt zerlegbare Gruppen. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1 2, 51—72 (1929). Bemerkungen über vollständig reduzible Gruppen. Ebd. 203—209.] Der Beweis geschieht auf einfachste Weise durch Betrachtung der Darstellungen des Remakschen Sockels von G , die durch die irreduziblen Darstellungen von G induziert werden. Zassenhaus (Hamburg).

Kuntzmann, Jean: Notion générale d'homomorphie dans un système multiforme. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1858—1859 (1939).

In einer Menge, in der eine mehrdeutige Multiplikation erklärt ist, ordnet Verf. jedem Element a eine Untermenge C_a zu. Diese Zuordnung heißt Symorphie, wenn aus $a' \subset C_a$, $b' \subset C_b$, $c \subset a' \cdot b' \rightarrow C_a \cdot C_b = C_c$. Gilt die Umkehrung, daß aus $C_a \cdot C_b = C_c$ für jedes $c' \subset C_c$ die Existenz eines $a^* \subset C_a$ und eines $b^* \subset C_b$ mit $a^* b^* \supset c'$ folgt, so spricht Verf. von Semi-Homomorphie. Ist $C_a \cdot C_b = C_{ab}$, so liegt Homomorphie vor. Inwiefern dies über die Symorphie hinausgeht, vermag Ref. aus der Note nicht zu entnehmen. Ott-Heinrich Keller.

Dilworth, R. P.: Non-commutative arithmetic. Duke math. J. 5, 270—280 (1939).

Betrachtet wird ein modularer, der Maximalbedingung („aufsteigende Ketten-Bedingung“) genügender Verband Σ , in dem eine assoziative und hinsichtlich der Vereinigungsbildung distributive, im allgemeinen nicht kommutative Multiplikation

so definiert ist, daß stets $a \supset b \cdot a$ wird. Dabei wird durchweg die einschneidende Voraussetzung gemacht, daß aus $a \cdot c = b \cdot c$ stets $a = b$ folgt. Dagegen braucht, und das ist das wesentliche, für zwei beliebige Σ -Elemente a, b das Produkt $a \cdot b$ nicht immer definiert zu sein. Σ zerfällt vielmehr in zwei Systeme von paarweise elementefremden Unterverbänden $L', L'', \dots, S', S'', \dots$, wobei jedem L umkehrbar eindeutig ein S angeordnet ist, derart, daß für $a \in L, b \in S$ stets $a \cdot b$ existiert, während für $c \notin L, b \in S$ bzw. $a \in L, c \notin S$ niemals $c \cdot b$ bzw. $a \cdot c$ gebildet werden kann. — Beschränkt man sich nun auf solche Verbände Σ , bei denen für den Durchschnitt $[a, b]$ zweier im selben L -Unterverband liegenden Elemente a, b stets eine Gleichung $[a, b] = c \cdot b$ gilt, so kann man nach Oreschem Vorbild den Begriff der „Konjugiertheit“ und der „Ähnlichkeit“ zweier Σ -Elemente sowie den Begriff der „Irreduzibilität“ eines Σ -Elements einführen und mit Überlegungen aus der Oreschen Theorie der nichtkommutativen Polynombereiche den folgenden Hauptsatz beweisen: Ist (in Σ) $a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot \dots \cdot q_s$ mit irreduziblen p_i und q_k , so ist stets $r = s$, und es sind die p_i zu den q_k paarweise ähnlich. Außerdem kann man leicht eine hinreichende Bedingung für die Zerlegbarkeit aller Σ -Elemente in irreduzible Faktoren angeben. Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich unmittelbar auf geeignete Halbgruppenverbände anwenden. Zu besonders einfachen Sätzen kommt man im Falle einer kommutativen Multiplikation.

Krull (Bonn).

Ward, Morgan, and R. P. Dilworth: Residuated lattices. Trans. Amer. Math. Soc. 45, 335—354 (1939).

The authors develop a theory of lattices (structures) in which also multiplication or the related operation of residuation (ideal division) exist. If a and b are elements of the lattice then multiplication $a \cdot b$ and residuation $a : b$ are defined by axioms corresponding to some of their ordinary properties and a first result is that under certain conditions the existence of one operation implies the other. Furthermore certain conditions for their existence are derived, for instance the only complemented lattices with a residuation are the Boolean algebras and here only one multiplication exists. The second part of the paper is devoted to Noether lattices. When multiplication is defined, primary elements may also be introduced and in a Noether lattice every irreducible element is also supposed to be primary. Most of the ordinary ideal decomposition theorems (v. d. Waerden: *Moderne Algebra*) can also be shown to hold in such lattices.

Oystein Ore (New Haven, Conn.).

Wilcox, L. R., and M. F. Smiley: Metric lattices. Ann. of Math., II. s. 40, 309—327 (1939).

Through the ordering relations in a lattice (structure) a completion by means of Dedekind cuts may be defined. On the other hand if the lattice is a metric space, a completion follows from the metric in the ordinary manner. The authors determine under the assumption of certain relations between the metric and the ordering relations, necessary and sufficient conditions for the two types of completions to be equivalent. Some of the results may be considered extensions of v. Neumann's results on continuous geometries.

Oystein Ore (New Haven, Conn.).

Wilcox, L. R.: Modularity in the theory of lattices. Ann. of Math., II. s. 40, 490—505 (1939).

The author considers lattices which satisfy certain weak modularity or Dedekind conditions. Using $a + b$ and ab for union and cross-cut respectively one writes: $(b, c)M$ (b and c modular) when $(a + b)c = a + bc$ for every $a \leq c$. Furthermore: $(b, c) \perp$ (b and c independent) when $bc = 0$ and $(b, c)M$. The author furthermore defines a lattice to be semi-modular when it satisfies the following two axioms:

α) If $(a, b) \perp$ then $(b, a)M$. β) If $(a, b) \neq 0$ then $(a, b)M$.

For such lattices the author proves the equality of the lengths of chains when the ascending and descending chain conditions are satisfied, hence one is able to introduce

a distance function in the lattice. A second problem considered is the relation of the semi-modular lattices to the axioms of affine geometry according to Menger.

Oystein Ore (New Haven, Conn.).

Maeda, Fumitomo: Lattice functions and lattice structure. J. Sci. Hiroshima Univ. A 9, 85—104 (1939).

The author considers a lattice L in which a lattice function $\Phi(a)$ is defined. This function is said to be additive when $\Phi(a \cup b) + \Phi(a \cap b) = \Phi(a) + \Phi(b)$ and completely additive when $\Phi(\sum a_i; i = 1, 2, \dots) = \sum \Phi(a_i)$ for any independent system a_i . Furthermore

$\Phi(a)$ is non-decreasing when $a < b$ implies $\Phi(a) \leq \Phi(b)$ and increasing when $a < b$ implies $\Phi(a) < \Phi(b)$. — It is shown that if $\Phi(a)$ is increasing then L is a Dedekind lattice which is a metric space with respect to the distance $\delta(a, b) = \Phi(a \cup b) - \Phi(a \cap b)$. When $\Phi(a)$ is non-decreasing one can introduce equivalence classes with respect to the metric and obtain similar results. These results are closely connected with results given by G. Birkhoff and Glivenko. The author gives various consideration on the completely additive case and shows the relation of completeness in metric to the definition of continuous geometries given by v. Neumann.

Oystein Ore.

MacNeille, H. M.: Extension of a distributive lattice to a Boolean ring. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 452—455 (1939).

Author gives an elegant solution of the problem of imbedding a distributive lattice K in a Boolean algebra L . Let H be the hypercomplex system generated by K as basis and with the integers modulo 2 as coefficient field; if K has a zero, it is to be identified with that of H . Let M be the ideal generated by all elements $u + a + b + ab$, where u is the union in K of a and b . Then $L = H/M$ is the smallest Boolean ring in which K can be imbedded, i. e. any reduction of L imposes new equalities in K . *Pospíšil*.

Mostowski, Andrzej, und Alfred Tarski: Boolesche Ringe mit geordneter Basis. Fundam. Math. 32, 69—86 (1939).

Für jede Teilmenge M ($0 \text{ non} \in M$) eines Ringes R wird mit $[M]$ der kleinste Teilring von R bezeichnet, der M umfaßt; M ist eine Basis von $[M]$. Verff. studieren die Booleschen Ringe, welche Basen besitzen, die durch $a \subset b$, $a \neq b$ ($a \subset b$ besagt: $a = ab$) geordnet sind. Es gibt Ringe mit einer Basis vom vorgegebenen Ordnungstypus (Satz 1.7). Jeder Boolesche Ring R ist durch den Typus einer geordneten Basis bestimmt (2.1). Die zu R homomorphen Ringe sind unter denjenigen Booleschen Ringen enthalten, deren geordnete Basen Teilmengen einer geordneten Basis von R sind (2.2). § 3 enthält Bedingungen dafür, daß R eine zerstreut geordnete Basis besitze. In solchen Ringen ist die Anzahl aller Primideale der Mächtigkeit einer jeden zerstreut geordneten Basis gleich (4.3).

Bedřich Pospíšil (Brünn).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Tarski, Alfred: Ideale in vollständigen Mengenkörpern. I. Fundam. Math. 32, 45—63 (1939).

Als Ideal in einem Mengenkörper bezeichnet man jedes nicht-leere erbliche und additive Teilsystem des Körpers. Verf. beschäftigt sich mit Mächtigkeitsfragen für gewisse Klassen von Idealen im Körper aller Teilmengen einer Menge von der Mächtigkeit \aleph . Nach einer Vorbereitung aus der Arithmetik der Kardinalzahlen (§ 1) betrachtet er (in § 2) die m -additiven Ideale, d. h. solche, die mit allen Mengen eines Systems von Mächtigkeit $< m$ zugleich deren Vereinigung als Element enthalten. In § 3 zeigt er u. a., daß es in unserem Körper $\exp \exp \aleph$ ($\exp x = 2^x$) Primideale gibt, d. h. Ideale, die mit einem Produkt (Durchschnitt) endlich vieler Mengen aus unserem Körper notwendig einen der Faktoren enthalten; dabei ist \aleph unendlich vorausgesetzt.

Bedřich Pospíšil (Brünn).

George, Erich: Ein Beitrag zur Theorie der geordneten Mengen. J. reine angew. Math. 180, 191—196 (1939).

In einer Menge \mathfrak{M} irgendwelcher Elemente a, b, \dots sei eine alternative und transitive Relation $<$ erklärt. Ist $a < b$, so heißt die Menge aller x aus \mathfrak{M} mit $a \leq x \leq b$ ein Intervall mit den Randelementen a, b . Sind i und i_1 zwei Intervalle mit den Randelementen a, b und a_1, b_1 , so nennt Verf. i und i_1 verschränkt, wenn $a < a_1 < b < b_1$ oder $a_1 < a < b_1 < b$; statt $a \leq a_1 < b_1 \leq b$ wird $i \supset i_1$ geschrieben. Eine unendliche Folge i_1, i_2, \dots von Intervallen mit $i_1 \supset i_2 \supset \dots$ heißt eine Schachtel F . Verf. schreibt $F \supset F'$ (F eine Oberschachtel von F'), wenn zu jedem i_ν aus F mindestens ein i'_ν aus F' existiert mit $i_\nu \supset i'_\nu$. Eine Menge \mathfrak{S} von Schachteln nennt Verf. spaltbar, wenn je zwei verschränkte Schachteln aus \mathfrak{S} eine in \mathfrak{S} enthaltene gemeinsame Oberschachtel besitzen. In einer solchen spaltbaren Schachtelmenge \mathfrak{S} wird für je zwei Schachteln f und f' geschrieben $f \sim f'$, wenn f und f' eine gemeinsame Oberschachtel in \mathfrak{S} haben. Diese Äquivalenzbeziehung \sim ist transitiv, reflexiv und symmetrisch. Bez. dieser Bezeichnung zerfällt \mathfrak{S} in Klassen paarweise äquivalenter Schachteln; Verf. nennt sie A-Klassen. — Aus der Relation $<$ der Elemente von \mathfrak{M} ergeben sich in nabeliegender Weise Relationen $<$ in den Mengen der Intervalle, Schachteln, A-Klassen. — Enthält jede Schachtel von \mathfrak{M} wenigstens ein Element aus \mathfrak{M} , so heißt \mathfrak{M} abgeschlossen geordnet. Enthält eine Schachtel höchstens ein Element aus \mathfrak{M} , so heißt sie konvergent; die Menge der konvergenten Schachteln ist spaltbar. — Diese Verallgemeinerung der Methode der Intervallschachtelungen der Theorie der reellen Zahlen (sie liefert in einfachen Fällen dasselbe wie die von Hausdorff verallgemeinerte Methode der Dedekindschen Schnitte) soll in einer demnächst erscheinenden Arbeit auf einen topologischen Stoff angewandt werden. Nöbeling (Erlangen).

Novák, J.: Zwei Bemerkungen zum Bernsteinischen Ultrakontinuum. Čas. mat. fys. 68, 147—160 (1939).

Der Verf. untersucht die Element- und Lückencharaktere (Typen) einer speziellen, durch Felix Bernstein eingeführten, geordneten Menge, des sogenannten Bernsteinischen Ultrakontinuums. — Das Bernsteinische Ultrakontinuum X ist ein geordneter Raum, dessen Elemente die unendlichen einfachen Folgen $x = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots = [\alpha_n]$ sind, wo α_n die Ordnungszahlen der ersten und der zweiten Zahlenklasse sind ($0 \leq \alpha_n < \omega_1$). In diesen Raum wird die Ordnung folgendermaßen eingeführt: der Punkt $x = [\alpha_n]$ ist vor dem Punkte $y = [\beta_n]$, wenn $\alpha_i = \beta_i$ für $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$, wogegen $\alpha_k < \beta_k$ bei ungeradem k oder $\alpha_k > \beta_k$ bei geradem k ist. — Der Verf. beweist einige Sätze über den Typus der Lücken, welche im Ultrakontinuum vorkommen können, und über die Struktur des Ultrakontinuums (z. B., daß es separabel ist, daß jede monotone Punktfolge höchstens \aleph_1 Punkte hat, daß die Lückenmenge jedes Typus dicht liegt und die Mächtigkeit \aleph_1 hat). Der Verf. macht außerdem zwei Bemerkungen. Die erste Bemerkung berührt das Problem von E. Čech (vgl. dies. Zbl. 17, 428). Im wesentlichen handelt es sich um die Konstruktion eines vollständig regulären Raumes, der in keinem seiner Punkte lokal normal ist. Verf. konstruiert einen solchen Raum als kartesisches Produkt zweier Mengen $P \times P'$, wo die Menge P aus dem Ultrakontinuum, durch Ausfüllung aller seiner Lücken, entsteht — und die Menge P' — durch Ausfüllung der Lücken von besonderem Typus. Aus diesem Beispiel geht weiter hervor, daß die lokale Normalität keine Invariante gegen die Operation des kartesischen Produktes ist. — In der zweiten Bemerkung korrigiert der Verf. eine unkorrekte Bemerkung, welche P. Alexandroff und P. Urysohn in ihrer Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Amsterdam 1929, S. 54, gemacht haben. Sie behaupten dort, daß man durch Ausfüllung aller Lücken im Bernsteinischen Ultrakontinuum einen bikompakten Raum mit nicht abzählbaren Charakteren bekommt. Diese Behauptung ist falsch; jedoch zeigt der Verf., daß eine solche Behauptung richtig ist für einen anderen, noch umfassenderen Raum, der analog zum Bernsteinischen Ultrakontinuum definiert ist und in dem statt einfach unendlicher Folgen der Ordnungszahlen der ersten und zweiten Zahlenklasse die transfiniten Folgen derselben Ordnungszahlen betrachtet werden. K. Zarankiewicz (Warschau).

Tarski, Alfred: On well-ordered subsets of any set. Fundam. Math. 32, 176—183 (1939).

Im ersten Teil der Arbeit beweist Verf. ohne Hilfe des Auswahlaxioms einige Sätze, die mit dem Cantorsche Satz ($2^m > m$) und dem Wohlordnungssatz verwandt sind. Wir sagen, daß ein Mengensystem erblich ist, falls jede Teilmenge einer Menge, die zum System gehört, auch Element des Systems ist. Das folgende Korollar faßt das Resultat der drei ersten sich auf erbliche Systeme beziehenden Sätze zusammen: Sei M eine Menge und S ein erbliches System von Teilmengen der M . Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Teilmenge von M , die wohlgeordnet werden kann und nicht zu S gehört, ist, daß es zu S eine eindeutige Funktion gibt, so daß $g(X) \in M - X$ für jedes $X \in S$. Dieses Korollar enthält auch die bekannte

Tatsache, daß die Möglichkeit der Wohlordnung das Vorhandensein einer selektiven Funktion (d. h. einer eindeutigen Funktion $h(X)$, so daß $h(X) \in X$ für $X \in S$) für das erbliche System aller nichtleeren Teilmengen von M fordert. Es sei noch das Korollar erwähnt, das den engen Zusammenhang der Wohlordnung mit der Mächtigkeit zeigt: Sei M eine Menge und S ein System von Mengen $X \subset M$, so daß $\bar{X} < \bar{M}$. Ist $\bar{M} = \bar{S}$, so können alle beide (d. h. M und S) wohlgeordnet werden. Eine Ausdehnung des Cantorsche Satzes beendet den ersten Teil: Ist S das System aller Teilmengen einer Menge M , die wohlgeordnet werden können, so ist $\bar{M} < \bar{S}$. Im zweiten Teil werden mit Hilfe der Resultate des ersten Teiles zwei Aussagen gegeben, die mit dem Auswahlaxiom äquivalent sind. Endlich gibt Verf. ein neues natürlicheres Axiom für die Existenz der unerreichbaren Kardinalzahlen, das auch mit dem Auswahlaxiom gleichwertig ist.

L. Eged (Budapest).

Sudan, G.: Sur une note de A. Tarski. C. R. Acad. Sci. Roum. **3**, 7—8 (1939).

Den von Tarski (Fundam. Math. **5**) aufgeführten, dem Auswahlaxiom äquivalenten Sätzen wird als ein weiterer zugefügt: Wenn p gleich n ist oder unmittelbar auf n folgt, so ist auch $m \cdot p$ gleich $m \cdot n$ oder folgt unmittelbar darauf (m, n, p unendliche Kardinalzahlen).

Arnold Schmidt (Marburg a. d. L.).

Sierpiński, Waclaw: Sur deux fonctions d'une suite infinie d'ensembles. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **19**, 67—69 (1937).

Ist Φ eine Mengenfamilie von der Mächtigkeit $\leq 2^{\aleph_0}$ und Δ eine abzählbare Teilmenge von Φ , so gibt es eine Mengenfunktion, für die $f(\Delta, \Delta, \dots) = \Phi$ besteht. [D. h. für jedes $E \in \Phi$ gilt $E = f(H_1, H_2, \dots)$, wo $\{H_n\} \subset \Delta$ und umgekehrt: ist $\{H_n\} \subset \Delta$, so ist $E = f(H_1, H_2, \dots)$ Element von Φ .] Ist Φ eine Familie von linearen Mengen von der Mächtigkeit $\leq 2^{\aleph_0}$, so gilt der Satz: Es gibt zu Φ eine Funktion f und ein abzählbares System von linearen Mengen Δ (das nicht notwendig Teilmenge von Φ ist), so daß $f(\Delta, \Delta, \dots) \supset \Phi$.

L. Eged (Budapest).

Sierpiński, Waclaw: Sur les ensembles concentrés. Fundam. Math. **32**, 301—305 (1939).

Man sagt, daß eine lineare unabzählbare Menge E konzentriert ist, falls es eine abzählbare Menge D gibt, so daß für jede offene Menge $U \supset D$ die Relation $\overline{E - U} < \aleph_0$ besteht. Verf. beweist ohne Hilfe der Kontinuumhypothese die Gleichwertigkeit der folgenden aus der Hypothese $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ gefolgerten Sätze: 1. Es gibt eine lineare konzentrierte Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums. 2. Es gibt eine Folge von konvergenter Funktionen $\{f_n(x)\}$, die auf jede unabzählbare Menge nicht gleichmäßig konvergiert.

L. Eged (Budapest).

Sierpiński, W.: Sur quelques transformations biunivoques de la droite en elle-même. Fundam. Math. **32**, 253—258 (1939).

Im Buche des Verf.: Hypothèse du continu (dies. Zbl. **9**, 302) ist folgender Satz enthalten: Im Falle $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ gibt es eine eindeutige Funktion, die die Gerade auf sich selbst und jede Menge vom Maße Null in eine Menge von erster Kategorie abbildet; die inverse Funktion transformiert die Mengen von erster Kategorie in Mengen vom Maße Null. In dieser Note wird dieses Resultat weitergeführt. Verf. behauptet zuerst, daß die obige Funktion nicht meßbar werden kann. Doch aus $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ folgt (Proposition T) die Existenz einer meßbaren Funktion $f(x)$ (in diesem Referat bedeute $f(x)$ eine eineindeutige Funktion, die die Gerade auf sich selbst abbildet), so daß das Bild jeder Menge von erster Kategorie eine Menge vom Maße Null ist. Eine solche Funktion erfüllt aber nicht die Bairesche Bedingung (im weiteren Sinn). Aber aus $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ läßt sich auch als Dualsatz (Proposition T^*) die Existenz einer Funktion $f(x)$ erschließen, die die Mengen vom Maße Null in Mengen von erster Kategorie transformiert und die Bairesche Bedingung (im weiteren Sinn) erfüllt. T und T^* sind aus den Propositionen L bzw. S (vgl. auch Sierpiński, dies. Zbl. **20**, 350) abgeleitet. Eine einfache Folgerung ist die Äquivalenz von T und S (bzw. T^* und S) mit der Kontinuum-

hypothese. Endlich gibt Verf. eine Funktion $f(x)$, die jede Menge vom Maße Null in eine von erster Kategorie und jede Menge von erster Kategorie in eine vom Maße Null verwandelt.

L. Egged (Budapest).

Rothberger, Fritz: Sur un ensemble toujours de première catégorie qui est dépourvu de la propriété λ . Fundam. Math. 32, 294—300 (1939).

Es gibt eine Menge, die die Eigenschaft λ (vgl. Sierpiński, dies. Zbl. 20, 108) besitzt, aber die Eigenschaft λ' nicht erfüllt (E besitzt die Eigenschaft λ' , falls $E \neq D$ die λ -Eigenschaft für jede abzählbare Menge D erfüllt). Ferner gibt es eine Menge stets von erster Kategorie, die die Eigenschaft λ nicht besitzt.

L. Egged (Budapest).

Sierpiński, Waclaw: Sur un ensemble à propriété λ . Fundam. Math. 32, 306—310 (1939).

Aus der Existenz einer Menge stets von erster Kategorie (Lusin) erschließt Verf. durch eine einfache Modifikation eine Menge mit der Eigenschaft λ , die diese Eigenschaft durch die Hinzufügung der Menge der rationalen Zahlen verliert (vgl. vorsteh. Ref.).

L. Egged (Budapest).

Inagaki, Takeshi: Le problème de Souslin et les espaces abstraits. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 191—201 (1939).

Souslin (I.) und Sierpiński (II.) haben die folgenden Fragen gestellt: (I.) Ist eine geordnete Menge, in der 1. jeder Schnitt ein und nur ein Element der Menge bestimmt, 2. jede Menge von ineinander nicht eindringenden Intervallen höchstens abzählbar ist, notwendig auch ein lineares Kontinuum (im gewöhnlichen Sinne)? (II.) Läßt sich ohne die Kontinuums-hypothese beweisen, daß die Vereinigung von \aleph_1 Mengen von erster Kategorie nicht notwendig von erster Kategorie ist? — Das Hauptresultat des Verf. besagt, daß es, wenn (I.) nicht besteht, einen abstrakten Raum gibt, in dem (II.) gilt. Der Beweis geschieht durch die Feststellung einiger Äquivalenzen, die auch an sich interessant sind.

L. Egged (Budapest).

Kunugui, Kinjiro: Contribution à la théorie des ensembles boreliens et analytiques. I. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 161—189 (1939).

Le principal résultat peut être énoncé comme suit: Si M est un ensemble plan G_δ dont toutes les intersections avec les droites parallèles à l'axe OY sont des ensembles F_σ , la projection de M sur l'axe OX est un ensemble borelien. C'est une réponse affirmative à une question posée par E. Szpilrajn et qui a pris sa naissance dans un théorème de N. Lusin qu'on obtient en remplaçant dans ce qui précède les ensembles F_σ par les ensembles au plus dénombrables. Le travail contient encore quelques généralisations utiles et intéressantes du résultat cité.

Bedřich Pospíšil (Brünn).

Koutský, Karel: Sur la séparabilité des ensembles dans les espaces topologiques. Čas. mat. fys. 68, 81—84 u. franz. Zusammenfassung 84 (1939) [Tschechisch].

Die betrachteten Räume genügen den folgenden Axiomen: 1. $\bar{O} = O$, 2. $M \subset \bar{M}$, 3. ist $M_1 \subset M_2$, so gilt $\bar{M}_1 \subset \bar{M}_2$. Verf. studiert die Räume, in denen $\bar{A}B = A\bar{B} = O$ nur unter einer gewissen Bedingung gelten kann. Es handelt sich (für $A \neq O$ und $B \neq O$) entweder um die Bedingung: „ A oder B ist offen“ oder um die Bedingungen, die daraus dadurch entstehen, daß „und“ statt „oder“ oder „abgeschlossen“ (resp. „gleichzeitig offen und abgeschlossen“) statt „offen“ gelesen wird. (M heißt abgeschlossen, wenn $\bar{M} = M$ ist; sie heißt offen, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist.)

Bedřich Pospíšil (Brünn).

Blumberg, H.: Exceptional sets. Fundam. Math. 32, 3—32 (1939).

This paper contains a variety of theorems about the general point set and the general real function, which are derived by the application of a method of proof, based on what the author calls „the germ principle“, or on similar principles. In the case of the linear continuum he considers an interval property P and calls a a point of anti-symmetry with respect to P if, for all sufficiently small positive h , the fact that $(a, a + h)$ has property P or has property non- P , resp. implies that $(a - h, a)$ has

property non- P or has property P . a is said a point of δ -antisymmetry ($\delta > 0$) if it is a point of antisymmetry and the relations defining antisymmetry hold for all positive $h < \delta$. If T is a set of positive numbers with 0 as a limit point, let S_n ($n=1, 2, \dots$) be the set of those points (x) of $\frac{1}{n}$ -antisymmetry for which $0 < h < \frac{1}{n}$, $h \in T$ or $0 < h < \frac{1}{n}$, $h \notin T$ resp. implies that $(x, x+h)$ has property P or has property non- P . Then it is immediately clear (and here the germ principle is used) that $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$ contains no points of S_n . The "exceptional" set $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ is therefore denumerable.

In some other theorems the exceptional sets are exhaustible or of measure zero, and in the case of the plane they can also be sparse (= "ridé" in the sense of W. H. Young). The properties considered in the case of two dimensions are, besides properties of linear intervals, sector properties, properties of open simple arcs, or of simply-connected regions bounded by straight lines. Under the known theorems derived in this paper are theorems of Sierpiński-G. C. Young, and of Blumberg-Schmeiser. We mention under the new theorems an example of a "set"- and one of a "function"-theorem: 1. If S is a planar set, then all points A of the plane not belonging to an exceptional sparse set are such that for every pair of vertically opposite sectors having A as vertex there exist two points, one in each sector, either both belonging to S or both belonging to $C(S)$; 2. If $f(x, y)$ is a one- or many-valued function, defined in a arbitrary point set, l a straight line, and π one of the half planes into which l divides the plane, then there exists an exceptional, at most denumerable subset E of l such that if (ξ, η, ζ) is a space point with (ξ, η) in l but not in E , either (ξ, η, ζ) is approached by the surface $z = f(x, y)$ via every direction of approach to (ξ, η) from π , or (ξ, η, ζ) is so approached by the space complement of $z = f(x, y)$.
J. Ridder (Groningen).

● Levi, F. W.: On the fundamentals of analysis. Calcutta: Univ. of Calcutta 1939. 56 pag.

Diese Arbeit enthält sechs Vorlesungen, die Verf. in Kalkutta über die grundlegenden Sätze der Analysis gehalten hat. Er erreicht eine einheitliche Behandlung durch die Einführung der distributiven, kollektiven und repartitiven Aussageigenschaften (vgl. Levi, Crelle J. 161, 101—106). Zu jeder von diesen gehört ein Hauptsatz: 1. Distributiver Satz: Gilt in einer beschränkten, abgeschlossenen, nichtleeren Menge C eine distributive Eigenschaft D , so gibt es in C einen Punkt d so, daß jede in C offene Menge, die d enthält, auch die Eigenschaft D hat. 2. Kollektiver Satz: Sei K eine kollektive Aussage und C eine Menge wie vorher. Ist jeder Punkt von C in einer in C offenen Menge enthalten, für die K gilt, so ist K auch für C gültig. 3. Der repartitive Satz vereinigt diese Sätze für eine repartitive Aussage. Hieraus folgen ohne weiteres der Satz von Weierstrass über die Existenz des Häufungspunktes einer beschränkten, unendlichen Menge; das Borelsche Theorem, das Vorhandensein des Dedekindschen Schnittes in einer geordneten Menge usw. Ebenso folgen durch die Einführung des Begriffes der Stetigkeit die bekannten grundlegenden Sätze der reellen Funktionen. Die Hauptsätze 1, 2, 3 gelten aber auch in einem Hausdorffschen Raum. Nach den Stetigkeitssätzen betrachtet Verf. die verschiedenen Konvergenzbegriffe und Konvergenzsätze im ein- und zweidimensionalen Fall. Endlich beschäftigt er sich mit dem Lindelöfschen Lemma in Verbindung mit dem repartitiven Satz und gibt einige Hausdorffsche Räume an, in denen das Borelsche Lemma als eine Folgerung des repartitiven Satzes gültig ist, aber das Lindelöfsche Lemma nicht besteht. L. Egged (Budapest).

Ursell, H. D.: Some methods of proving measurability. Fundam. Math. 32, 311—330 (1939).

This paper gives a systematic account of several theorems about measurability (B) or (L) of functions, and also of sets. The two fundamental theorems from which the author derives further results (their proofs are simple) are: 1. Let $f(x, y)$ be any real

function defined for points (x, y) of a set E ; for any given x $E'(x)$ denote the set of points y such that $(x, y) \in E$ and for any given y $E(y)$ the set of points x such that $(x, y) \in E$. The sets $E'(x)$ will be subsets of a metrical space; the sets $E(y)$ are quite arbitrary. If then all sections $E'(x)$ are open and if $f(x, y)$ is lower semi-continuous in y for each fixed x , then

$$\varphi(y) = \sup_{x \in E(y)} f(x, y)$$

is lower semi-continuous; 2. In a Cartesian space "angular region" means an open set composed entirely of open segments all having the vertex of the region as a common endpoint; if each point of a set is the vertex of an angular region, then the set is called "regular". If x is a point of a Cartesian space and y a point of another Cartesian space and if $E, E(y), E'(x)$ have for these spaces the same meaning as under 1., then for a real function $f(x)$, defined for all $E(y)$, $\varphi(y) = \sup_{x \in E(y)} f(x)$ will be measurable

under the condition that all sections $E'(x)$ are regular. Under the theorems derived from 1. or 2. there are theorems of Sierpiński, Banach, Auerbach. The last part of the paper is devoted to results of a type in which, given a function f or a set E in (x, y) -space from hypotheses in the separate spaces $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ is derived the measurability of f or E in the (x, y) -space; we mention: If $f(x, y)$ is measurable in x on a measurable set $E(y)$ of the Cartesian x -space for each fixed y and monotonic in y in the linear space $R_1(x)$ for each fixed x , then it is measurable in (x, y) .

J. Ridder (Groningen).

Kershner, Richard: The number of circles covering a set. Amer. J. Math. 61, 665—671 (1939).

Ist M eine beschränkte ebene Punktmenge, A das Riemannsche äußere Maß der abgeschlossenen Hülle \bar{M} von M , $N(\varepsilon)$ die Kleinstzahl der Kreise vom Radius ε , mit denen M lückenlos überdeckt werden kann, so ist $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi \varepsilon^2 N(\varepsilon) = (2\pi\sqrt{3}/9) A$. Ist M ein Rechteck vom Inhalt A und Umfang p , so ist

$$(2\pi\sqrt{3}/9) (A - 2\pi\varepsilon^2) < \pi\varepsilon^2 N(\varepsilon) < (2\pi\sqrt{3}/9) (A + 2p\varepsilon + 16\varepsilon^2).$$

Bol (Freiburg).

Jessen, Børge: Abstrakte Maß- und Integraltheorie. IV. Mat. Tidsskr. B 1939, 7—21 [Dänisch].

In diesem Abschnitt wird die Theorie der Maße und Integrale in abstrakten Produkträumen dargestellt. (Vgl. dies. Zbl. 21, 15.) Ahlfors (Helsingfors).

Carathéodory, Constantin: Die Homomorphismen von Somen und die Multiplikation von Inhaltsfunktionen. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 8, 105—130 (1939).

Die Somen wurden vom Autor eingeführt in S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1938; dies. Zbl. 20, 297. Eine Homomorphie ist eine Abbildung eines σ -Körpers von Somen auf einen zweiten derartigen σ -Körper, bei welcher verschiedene Bedingungen erfüllt sind, die wir hier unterdrücken. Ist für die Somen eines σ -Körpers ein „normales“ äußeres Maß definiert, so läßt sich dieser Körper homomorph und maßtreu auf einen ebensolchen Körper abbilden. Mit Hilfe derartiger Abbildungen läßt sich die Hahnsche Theorie der Multiplikation von Inhaltsfunktionen auf den Fall übertragen, daß diese Inhaltsfunktionen nicht auf Mengen-, sondern auf Somenkörpern gegeben sind.

J. Ridder (Groningen).

Takeya, Sôichi: On some kind of integrals. Jap. J. Math. 15, 105—123 (1939).

A functional $F[x(s)]$, defined in the space of all real, bounded, periodic functions $\{x(s)\}$, with period 1, may satisfy the conditions: (1) $F(ax + by) = aF(x) + bF(y)$; (2) $F(x) \geq 0$ whenever $x(s) \geq 0$; (3) $F[x(s + a)] = F[x(s)]$; (4) $F(1) = 1$; it is called (A_1) -integral. The sub-space S for which these conditions give an unambiguously determined value of this integral, contains the sub-space of all Riemann-integrable functions and also some measurable (but not R -integrable) and some non-measurable functions. By adding the condition: (5) $F[U_W(s)] \rightarrow 0$ whenever $\bar{m}(W) \rightarrow 0$; here

$\overline{m}(W)$ is the exterior Lebesgue-measure of the set W lying on $0 \leq s < 1$ and $U_W(s)$ is periodic with period 1, equal to 1 on the points of W and to 0 on the other points of $(0 \leq s < 1)$, the (A_2) -integral is obtained. The sub-space for which this integral is unambiguously determined, contains the space S , all measurable functions and further some (but not all) non-measurable functions. Cf. Banach, Théorie des opérations linéaires. Chapter 2; this Zbl. 5, 209; de la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue etc. 2. édit. Paris 1934. p. 58—60.

J. Ridder (Groningen).

Kempisty, Stefan: Sur les fonctions à variation bornée au sens de Tonelli. Bull. Sémin. math. Univ. Wilno Nr 2, 13—21 (1939).

Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans le carré $Q \equiv [0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1]$, soit R le rectangle $a \leq x \leq a + h, b \leq x \leq b + k$; posons:

$$H_1(f, R) = k \cdot \min_{b \leq y \leq b+k} |f(a+h, y) - f(a, y)|,$$

$$H_2(f, R) = h \cdot \min_{a \leq x \leq a+h} |f(x, b+k) - f(x, b)|, \quad H(f, R) = \sqrt{|R|^2 + H_1^2 + H_2^2},$$

et designons avec $A(f, Q)$ l'aire au sens de Lebesgue de la surface $z = f(x, y)$. — L'A. montre que si $f(x, y)$ est continue et à variation bornée au sens de Tonelli, on a

$$A(f, Q) = \int_Q H(f, R),$$

où \int est l'intégrale supérieure de Burkill. — De plus, pour que $f(x, y)$ soit absolument continue au sens de Tonelli, il faut et il suffit que $H(f, R)$ soit absolument continue, et dans ce cas nous avons

$$\int_Q H(f, R) = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

S. Cinquini (Pavia).

Krzyżański, Miroslaw: Sur l'extension de l'opération intégrale de Denjoy aux fonctions de deux variables. Bull. Sémin. math. Univ. Wilno Nr 2, 41—51 (1939).

Démonstrations de théorèmes énoncées dans une note des C. R. Acad. Sci., Paris 198; ce Zbl. 9, 207. En outre l'auteur prouve que la continuité absolue d'une fonction additive de rectangle $F(R)$ sur un ensemble fermé E entraîne l'existence d'un accroissement défini de $F(R)$ sur E . Ceci donne une simplification dans la définition descriptive de la totalisation au sens de Krzyżański. (On peut faire une remarque analogue pour la totalisation au sens de Ridder; voir C.R. Soc. Sci. Varsovie 28; ce Zbl. 13, 7 et 8.)

J. Ridder (Groningen).

Sierpiński, Wacław: Remarque sur les suites doubles de fonctions continues. Fundam. Math. 32, 1—2 (1939).

Gilt $f(x) = \lim_{m=\infty} \left(\lim_{n=\infty} f_n^m(x) \right)$ für jedes x , wo jedes $f_n^m(x)$ eine stetige Funktion ist, so gibt es nach Fréchet zwei Indizesfolgen $\{m_k\}$ und $\{n_k\}$ so, daß $f(x) = \lim_{k=\infty} f_{n_k}^{m_k}(x)$ ist für jedes x , ausgenommen eine Menge vom Maße Null. S. Braun hat gefragt, ob dieser Satz auch im Fall bestehe, in dem anstatt „Menge vom Maße Null“ der Ausdruck „Menge von erster Kategorie“ gesetzt wird. Verf. zeigt durch ein Beispiel, daß diese Vermutung falsch ist.

L. Egged (Budapest).

Gama, Lelio I.: Sur les fonctions d'intervalle. Ann. Acad. Brasil. Sci. 11, 33—41 (1939).

L'A. espone, in forma semplice e chiara, i principi di una teoria delle funzioni reali $f(\Delta)$, definite sull'insieme degli intervalli Δ contenuti in un certo intervallo assegnato, pervenendo ad alcuni teoremi generali, ai quali egli riconduce, come casi particolari, numerose proposizioni note: per es. il teorema della convergenza uniforme della variazione di una funzione continua verso la sua variazione totale, il lemma di Darboux generalizzato (v. L. Tonelli, Calcolo d. Variazioni, I, p. 37) e la condizione d'integrabilità di Riemann.

Tullio Viola (Roma).

Boas jr., R. P.: Oscillating functions. Duke math. J. 5, 394—400 (1939).

L'A. studia le funzioni continue ed ovunque oscillanti nell'intervallo $\langle 0, 1 \rangle$ (cioè, in ogni sottointervallo di $\langle 0, 1 \rangle$ non monotone, oppure non monotone in quasi tutti i punti di $\langle 0, 1 \rangle$, ecc. . .) e costruisce un esempio di una funzione continua ed a variazione limitata, che in quasi tutti i punti del suo intervallo di definizione è non monotona (sia a destra che a sinistra). — Nei riguardi delle funzioni continue e oscillanti in $\langle 0, 1 \rangle$, l'A. studia la struttura di insiemi di funzioni siffatte considerati come sottoinsiemi di opportuni spazi metrici. Per es.: Se T è lo spazio metrico completo delle funzioni $x(t)$, assolutamente continue in $\langle 0, 1 \rangle$ con $x(0) = 0$ e $|x'(t)| \leq 1$ quasi-

ovunque, nel quale la distanza è data da $\int_0^1 |x'(t) - y'(t)| dt$, allora l'insieme delle funzioni di T , in ogni sottointervallo di $(0, 1)$ non monotone, è il complementare in T di un insieme di prima categoria (e quindi non è vuoto, risultato quest'ultimo che, come osserva l'A., segue anche da esempi di Köpcke e Denjoy ch'egli ricorda).

G. Scorza Dragoni (Padova).

Gourin, Eli: A generalized theorem on oscillating functions. Fundam. Math. 32, 97—102 (1939).

According to Petrovski and Caccioppoli (cf. Saks, Theory of the integral, sec. ed. 1937, p. 275, see this Zbl. 17, 300), a continuous function $y(t)$ is a constant in the closed linear interval I if the derivative of $y(t)$ with respect to another continuous function vanishes everywhere in I . This note contains a new proof based on the lemma: If a function $x(t)$ is continuous in the interval I and oscillates everywhere in a perfect subset of I , then $x(t)$ repeats at least one of its values an infinite number of times.

J. Ridder (Groningen).

Cassina, U.: Curva di Peano in base due. Period. Mat., IV. s. 19, 113—125 (1939).

Konstruktionsverfahren für die Peanokurve, welche natürlich auf mannigfache Weise darstellbar ist.

G. Alexits (Budapest).

Seebach, Karl: Über die Erweiterung des Definitionsbereiches differenzierbarer Funktionen. Math. Ann. 116, 701—718 (1939).

Der Autor geht aus von einer linearen abgeschlossenen Menge E , auf der eine reelle Funktion $f(x)$ gegeben ist und in deren Verdichtungs Punkten sie eine endliche Ableitung in bezug auf E hat. Er leitet eine notwendige und hinreichende Bedingung ab für die Existenz einer für den ganzen $R_1[-\infty < x < +\infty]$ erklärten und differenzierbaren Funktion $F(x)$, welche auf E mit $f(x)$ identisch ist. Es zeigt sich dabei, daß die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Erweiterung von $f(x)$ nicht abhängt von den Werten, welche die Ableitung $F'(x)$ in den isolierten Punkten von E annehmen soll. Die Bedingung ist erfüllt, wenn die Ableitung $f'_E(x)$ auf E stetig ist oder wenn ihre Unstetigkeitspunkte eine höchstens abzählbare Menge bilden. Ob die Bedingung sich immer erfüllen läßt oder nicht, ist jedoch noch fraglich.

J. Ridder (Groningen).

Popoviciu, Tiberiu: Deux remarques sur les fonctions convexes. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 20, Nr 7, 45—49 (1938).

Une fonction finie $f(x)$ est, par définition, convexe resp. non-concave d'ordre n sur un ensemble E selon que les différences divisées d'ordre $n+1$ sur tous les groupes de $n+2$ points de E sont >0 ou ≥ 0 . Théorèmes: 1. Une fonction continue sur un ensemble fermé et borné E est non-concave (d'ordre 1) sur E si et seulement si pour tout α , pour lequel $f(x) + \alpha x$ atteint son minimum en deux points x_1, x_2 de E , elle l'atteint aussi en tout point compris entre x_1 et x_2 . 2. Pour qu'on puisse décomposer un ensemble E sur lequel la fonction finie $f(x)$ est définie, en deux sous-ensembles E_1, E_2 consécutifs, avec $f(x)$ monotone sur E_1 et sur E_2 , il faut et il suffit que

$$f(x_2) \leq \max[f(x_1), f(x_3)]$$

pour tout triple de points $x_1 < x_2 < x_3$, contenus dans E . Cf. Popoviciu, Mathematica, Cluj 8,; ce Zbl. 9, 59.

J. Ridder (Groningen).

Popoviciu, Tiberiu: Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **20**, Nr 7, 50—53 (1938).

Toute fonction continue et non-concave d'ordre n dans un intervalle (a, b) est limite d'une suite uniformément convergente dans (a, b) de polynômes qui sont convexes d'ordre n dans $(-\infty, +\infty)$. Cf. Popoviciu, Mathematica, Cluj **10**; ce Zbl. **10**, 295.
J. Ridder (Groningen).

Popoviciu, Tiberiu: Sur le prolongement des fonctions monotones et des fonctions convexes définies sur un nombre fini de points. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **20**, Nr 7, 54—56 (1938).

Si une fonction, définie pour les m points $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, est croissant (au sens strict) ou bien si elle est convexe (d'ordre 1), on peut prolonger cette fonction par un polynôme croissant resp. convexe (d'ordre 1) sur tout l'axe réel. Cf. Popoviciu, Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **36**; ce Zbl. **10**, 16.
J. Ridder (Groningen).

Analysis.

Reihen:

Doyle, William C.: A generalized Lambert series and its Moebius function. Ann. of Math., II. s. **40**, 353—359 (1939).

Verf. untersucht die verallgemeinerte Lambertsche Reihe

$$\sum a_n b_n z^{\lambda n} : (1 - a_n z^{\mu n}) \quad (0 \leq L \leq |a_n|^{1/n} \leq M, \mu \text{ und } \lambda \text{ ganz}) \quad (1)$$

und beweist: I. (1) konvergiert überall, wo die Reihe $\sum a_n b_n z^{\lambda n}$ konvergiert, und zwar gleichmäßig in jedem im Konvergenzbereich enthaltenen geschlossenen Gebiet für $|z| < M^{-1/\mu}$ (wenn $\mu \geq 0$) bzw. für $|z| > M^{-1/\mu}$ (wenn $\mu < 0$). Entsprechendes gilt für den Konvergenzbereich von (1) und der Reihe $\sum b_n z^{(\lambda - \mu)n}$ für $|z| > L^{-1/\mu}$ (wenn $\mu \geq 0$) bzw. $|z| < L^{-1/\mu}$ (wenn $\mu < 0$). II. Gehört der Nullpunkt zum Konvergenzbereich von (1), so läßt sich (1) durch eine Potenzreihe ausdrücken; das Umgekehrte aber findet dann und nur dann statt, wenn μ ein Vielfaches von λ ist. — Um die Koeffizienten A_n einer Potenzreihe und diejenigen der zugehörigen Reihe (1) gegenseitig ausdrücken zu können, führt der Verf. als verallgemeinerte Moebius'sche Koeffizienten die durch $\sum_d' a_{n/d}^{(u/d)} S(d) = 1$ für $u = 1$ und $= 0$ für $u > 1$ definierte (von a_n abhängende) Funktion $S(u)$ ein, und erhält die Formeln $a_n b_n = \sum_d' A_{\lambda d} S(n/d)$ und

$$A_n = \sum_d' a_d^{1+1} b_d \left(n/d \equiv (\text{mod } u), 1 = \frac{n - d\lambda}{d\mu} \right). \quad \text{Vojislav G. Avakumović (Beograd).}$$

Cooke, Richard G.: A note on lower semi-matrices. J. London Math. Soc. **14**, 154—157 (1939).

Verf. geht davon aus, daß bisher kein durch eine Toeplitzsche Dreiecksmatrix $\|a_{nk}\|$ ($k=0, 1, \dots, n; n=0, 1, 2, \dots$) definiertes Summierungsverfahren angegeben worden sei, das geeignet ist, Potenzreihen in einem Gebiet außerhalb ihres Konvergenzkreises zu summieren. (Tatsächlich kennt man solche Verfahren, z. B. die Euler-Knoppschen Verfahren.) Um ein Verfahren dieser Art zu erhalten, wird das Borelsche Verfahren in passender Weise modifiziert und u. a. gezeigt: Ist $\lambda > 1$, so summiert das durch die

Toeplitzsche Dreiecksmatrix $\|a_{nk}\|$ mit $a_{nk} = e^{-\frac{n}{\lambda}} \left(\frac{n}{\lambda} \right)^k / k!$ ($k=0, 1, \dots, n; n=0, 1, 2, \dots$) definierte Verfahren die geometrische Reihe $\sum z^n$ im Durchschnitt der Halbebene

$Rz < 1$ und des Kreises $|z| \leq \lambda e^{\frac{1}{\lambda} - 1}$. — Bei der genannten Matrix liegt für hinreichend großes n das Maximum der a_{nk} aus der n -ten Zeile bei $k = \left[\frac{n}{\lambda} \right]$. Das Verfahren läßt sich noch so abändern, daß eine Dreiecksmatrix entsteht, bei der in jeder Zeile zwei oder mehr Maxima auftreten.
F. Lösch (Rostock).

Hill, J. D.: On the space (γ) of convergent series. Tôhoku Math. J. 45, 332—337 (1939).

Es sei (c) der Raum der (reellen) konvergenten Folgen $x = \{u_k\}$ und (γ) der Raum der konvergenten Reihen $x = \{u_k\}$, $\sum u_k$ konvergent. Verf. betrachtet Transformationen $T: f_m(x) = \sum a_{mk} u_k$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) die 1. (c) in (c) , 2. (γ) in (c) , 3. (c) in (γ) , 4. (γ) in (γ) überführen. In Ergänzung bereits bekannter Theoreme werden für alle vier Fälle notwendige und hinreichende Bedingungen für die Transformationsmatrix (a_{mk}) entwickelt. Außerdem werden noch verschiedene in diesen Zusammenhang gehörende Resultate gewonnen, z. B. betreffend das Cauchysche Reihenprodukt. Verf. zitiert verschiedentlich aus dem Werk von Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*. Warsaw 1932; dies. Zbl. 5, 209. H. Hadwiger (Bern).

Day, Mahlon M.: Regularity of function-to-function transformations. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 296—303 (1939).

Verf. beschäftigt sich mit Transformationen der Form

$$U_x(f) = \int_0^\eta K(x, y) f(y) dy. \quad (*)$$

Dabei soll der Kern $K(x, y)$ als komplexwertige Funktion der reellen Veränderlichen x, y in $0 < x < \xi$, $0 < y < \eta$ definiert und für jedes feste x aus $(0, \xi)$ über $(0, \eta)$ meßbar sein. Die Funktion $j(y)$ sei in $(0, \eta)$ komplexwertig definiert, über $(0, \eta)$ meßbar und besitze für $y \rightarrow \eta$ einen endlichen Limes L_f ; die Klasse dieser Funktionen $f(y)$ heiße \mathfrak{B} . Die Transformation [oder der Kern $K(x, y)$] heißt in einer Unterklasse \mathfrak{B}' von \mathfrak{B} regulär, wenn für jede Funktion $f(y)$ aus \mathfrak{B}' a) $U_x(f)$ für alle x aus $(0, \xi)$ existiert, b) $\lim_{x \rightarrow \xi} U_x(f) = L_f$ gilt. Die größte Unterklasse von \mathfrak{B} , in der die Transformation $(*)$ regulär ist, heißt ihr Regularitätsgebiet. — 1. J. D. Hill [dies. Zbl. 14, 14; vgl. auch H. Hahn, *Mh. Math. Phys.* 32, 3—88 (1922)] hat notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß $(*)$ in der Klasse \mathfrak{B} der auf $(0, \eta)$ wesentlich beschränkten Funktionen aus \mathfrak{B} regulär ist. 2. Verf. gibt nun weiter für eine in \mathfrak{B} reguläre Transformation $(*)$ Bedingungen an, die die sämtlichen Funktionen $f(y)$ des Regularitätsgebiets der Transformation charakterisieren. 3. Aus diesen Ergebnissen werden sodann Bedingungen für $K(x, y)$ abgeleitet, die notwendig und hinreichend dafür sind, daß das Regularitätsgebiet von $K(x, y)$ gewisse Unterklassen von \mathfrak{B} enthält, die umfassender als \mathfrak{B} sind, z. B. die Klasse \mathfrak{S} der Funktionen $f(y)$ aus \mathfrak{B} , die für jedes $Y < \eta$ über $(0, Y)$ L -integrabel sind. 4. Schließlich wird gezeigt, daß \mathfrak{B} nicht das Regularitätsgebiet einer Transformation $(*)$ sein kann, dagegen werden Kerne $K(x, y)$ konstruiert, deren Regularitätsgebiet \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{S} ist. — Die sämtlichen unter 1. bis 4. genannten Ergebnisse gelten allgemeiner für Transformationen der Form $(*)$, bei denen für beliebige ganze $m, n > 0$ Funktionen von m reellen Veränderlichen in solche von n reellen Veränderlichen übergeführt werden. F. Lösch (Rostock).

Obrechhoff, N.: Sulla sommazione assoluta degli integrali colle medie di Cesàro. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 29, 31—34 (1939).

$\int_0^x f(t) dt$ wird absolut C_k -summierbar zum Werte S genannt, wenn

$$|C, k| \quad \int_0^\infty |f_k'(t)| dt = S, \quad \text{wo} \quad \varphi_k(x) = \int_0^x (1 - t/x)^k f(t) dt$$

bedeutet. Verf. beweist einige Integralanaloge bekannter reihentheoretischer Sätze.

I. Aus $|C, k_1|$ folgt $|C, k_2|$ für jedes $k_1 > k_2$. II. Sind $\int_0^x f(t) dt$ bzw. $\int_0^x \varphi(t) dt$, $|C, \alpha|$ bzw. $|C, \beta|$ -summierbar, so ist (I) $\int_0^x ds \int_0^s f(t) \varphi(s - t) dt$ $|C, \alpha + \beta|$ -summierbar.

III. Ist eine der Funktionen etwa $\int_0^x f(t) dt$ nur (C, α) -summierbar zum Werte T

(d. h. $\varphi_k(x) \rightarrow T$ bei $x \rightarrow \infty$) und $\int_0^x \varphi(t) dt$ $|C, \beta|$ -summierbar zum Werte T' , so ist (1), $(C, \alpha + \beta)$ -summierbar zum Werte TT' . IV. Aus $|C, \alpha|$, $\alpha \geq 0$, folgt die Konvergenz von $\int_0^\infty |g'(s)| ds$, wo $g(s)$ die Laplace-Transformierte von $f(t)$ bedeutet.

Vojislav G. Avakumović (Beograd).

Hyslop, J. M.: Some sufficient conditions for the absolute Cesàro summability of series. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 6, 51—56 (1939).

L'auteur a posé et résolu le problème de conditions suffisantes pour assurer la sommabilité absolue par les moyennes arithmétiques d'une série sommable (C, k) . Il a démontré qu'en posant $s_n^{(k)} = s + \varepsilon_n$ il suffit de supposer la convergence absolue de la série $\sum n^{-1} \cdot \varepsilon_n$ pour assurer la sommabilité $|C, k+1|$. En particulier pour $n^\delta \cdot \varepsilon_n$ borné (avec $0 < \delta \leq 1$) on a la sommabilité $|C, \lambda|$ pour tout $\lambda > k+1-\delta$. Enfin, si une série $\sum u_n$ vérifie la condition qui exige que la série $\sum n^\delta \cdot u_n$ soit bornée (C, k) , où k est un entier non négatif et $0 < \delta \leq 1$, alors elle est sommable $|C, \lambda|$ pour $\lambda > k+1-\delta$.

E. Kogbetliantz (Paris).

Chow, H. C.: On the absolute summability (C) of power series. J. London Math. Soc. 14, 101—112 (1939).

Dans ce beau travail l'auteur a rattaché la sommabilité absolue par les moyennes arithmétiques d'ordre α , bref $|C, \alpha|$, d'une série $\sum_0^\infty a_n$ aux propriétés de sa fonction génératrice $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$. Ses résultats peuvent être formulés ainsi: Soit $f_0(z) = f(z)$ et pour $\alpha > 0$

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{(1-z)\Gamma(\alpha)} \int_z^1 \left(\log \frac{1-z}{1-u} \right)^{\alpha-1} \cdot f(u) du,$$

le chemin d'intégration étant rectiligne. On a les deux théorèmes suivants: Si $a_n = O(n^k)$ et $f_\alpha(z)$ est à variation bornée dans le cercle de rayon $|z|=1$ la série $\sum a_n$ est sommable $|C, \alpha|$, où $\alpha \geq 0$ est entier. Inversement la sommabilité $|C, \alpha|$ de $\sum a_n$ ($\alpha = E(\alpha)$) entraîne le fait que $f_\beta(z)$ est à variation bornée dans le cercle de rayon unité pour tout $\beta > \alpha+1$. En outre il est prouvé que la condition nécessaire et suffisante de la sommabilité $|C, \alpha+1|$, $\alpha \geq 0$, de $\sum a_n$ est la sommabilité $|C, \alpha|$ de la série $\sum b_n$, où b_n désigne la somme généralisée de la

série divergente $b_n \cong \sum_{m=n}^\infty \frac{a_m}{m+1}$ sommable (C, α) . Dans cet énoncé on peut remplacer le procédé (C) de Cesàro par celui (H) de Hölder en modifiant légèrement la définition de b_n et

posant $b_0 = 0$, $b_n \cong \sum_{m=n}^\infty \frac{a_{m+1}}{m}$ (H, α) . A la fin sont énoncés sans preuve les deux théorèmes que voici: 1. Soit $\varphi_0(z) = f(z)$ et pour $\alpha = E(\alpha) > 0$

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^\alpha} \int_z^1 (u-z)^{\alpha-1} \cdot f(u) du.$$

Si $a_n = O(n^k)$ et $\varphi_\alpha(z)$ est à variation bornée pour $|z| \leq 1$ la série $\sum a_n$ est sommable $|C, \alpha|$; 2. soit $k = E(k) > 0$, $\sum b_n$ sommable $|C, \alpha \geq 0|$ et $a_n = A_n^{(k)} \cdot \Delta^k b_n$ où

$$\Delta^k b_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} b_{n+i}$$

alors $\sum a_n$ est sommable $|C, \alpha+k|$. Inversement si $\sum a_n$ est sommable $|C, \alpha+k|$ il n'y a qu'une seule suite bien déterminée b_n^* telle que $A_n^{(k)} \cdot \Delta^k b_n^* = a_n$ et $\sum b_n^*$ est sommable $|C, \alpha|$.

E. Kogbetliantz (Paris).

Izumi, Shin-ichi, and Tatsuo Kawata: Notes on Fourier series. VIII: On the behaviour of partial sums and Fejér's means of Fourier series. Tôhoku Math. J. 45, 212—218 (1939).

Bezeichne $s_n(x)$ die n -te Partialsumme, $\sigma_n(x)$ das n -te arithmetische Mittel erster Ordnung der Fourierreihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Die Symbole

$a_n, b_n \in l_p$ bzw. $\in h$ sollen bedeuten, daß $f(x)$ eine L_p -integrierbare Funktion ist, bzw. $f(x)$ samt ihrer konjugierten Funktion L -integrierbar ist. Setzen wir noch $S(p, x) = \sum_{n=1}^{\infty} |s_n(x) - \sigma_n(x)|^p : n$. Ist $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/q = 1$, $\alpha q > 1$, C eine geeignet gewählte Konstante, so gilt

$$\left\{ \int_0^{2\pi} S(q, x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^p + |b_n|^p) \log^{\alpha p} n \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Ist $p > 1$, $\alpha p > 1$ und $a_n \log^{\alpha} n, b_n \log^{\alpha} n \in l_p$, so gilt

$$\int_0^{2\pi} S(p, x) dx \leq C \int_0^{2\pi} |g(x)|^p dx,$$

wo $g(x)$ jene Funktion bedeutet, deren Fourierkoeffizienten $a_n \log^{\alpha} n, b_n \log^{\alpha} n$ sind. Daraus folgt unmittelbar, daß $S(p, x)$ fast überall konvergiert. Ist weiter entweder $0 < p \leq 2$, $\alpha > 1/p - 1/2$, oder $p \geq 2$, $\alpha > 1 - 2/p$ und in beiden Fällen $a_n \log^{\alpha} n, b_n \log^{\alpha} n \in h$, so konvergiert $S(p, x)$ fast überall. Unter denselben Bedingungen ist auch die lückenhafte Reihe $\sum |s_{n_k}(x) - \sigma_{n_k}(x)|$ fast überall konvergent, wenn nur $n_{k+1}/n_k \geq \vartheta > 1$ bleibt. Ein weiteres Kriterium für die fast überall stattfindende Konvergenz der Reihe $S(p, x)$ ist das folgende: $p > 2$, $1 < q \leq 2$, $\alpha p q \geq p - 2$ und $a_n \log^{\alpha} n, b_n \log^{\alpha} n \in l_q$. (V.—VII. vgl. dies. Zbl. 21, 21.) *G. Alexits* (Budapest).

Marcinkiewicz, Joseph: Sur une méthode remarquable de sommation des séries doubles de Fourier. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 8, 149—160 (1939).

Für die D - F -Reihe der Funktion $f(x, y)$ mit der Periode 2π werden die Teilsummen bezeichnet mit $s_{m,n}(x, y)$. Es sei $s_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{n-1} s_{kk}$; $s_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n s_k^{(1)}$. Für f werden Funktionen betrachtet, die der Klasse L^p angehören, in Zeichen $f \in L^p$ und andererseits f , für die $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f| \lg\{1 + f^2\} dx dy < \infty$, in Zeichen $f \in L^*$. Im § 2 wird hingewiesen auf die bisherigen Resultate bezüglich der arithmetischen Mittel der $s_{\mu,\nu}$, der Mittelwerte von Bochner $4\pi^{-1} R^{-2} \sum s_{m,n}, m^2 + n^2 \leq R^2$, sowie der Mittelwerte $(n+1)^{-2} \sum_{\mu,\nu=0}^n s_{\mu,\nu}$.

Das sind die einzigen Mittelbildungen, die bisher bei den D - F -Reihen mit Erfolg Verwendung fanden. Die Arbeit enthält die Resultate betreffend eine weitere derartige Methode. Sie werden zusammengefaßt in vier Sätzen. Satz 1. Wenn f stetig ist, dann existiert $\lim n^{-1} s_n^{(1)}$ gleichmäßig. Satz 4. Wenn $f \in L$ dann konvergiert $\lim 2n^{-1}(n+1)^{-1} s_n^{(2)}$ fast überall gegen f . Sätze 2 und 3 enthalten Aussagen, wenn $p > 1$ und wenn $f \in L^*$. Die Beweise sind gegliedert in im ganzen 16 Hilfssätze (Lemma 4 spricht den „Lokalisationssatz“ aus für $\lim n^{-1} s_n^{(1)}$), die z. T. bekannt sind (ausführliche Zitate vorhanden), z. T. neuartige Abschätzungen enthalten. Es ist nicht überall leicht, dem Gedankengang zu folgen, da mehrere Druckfehler dies erschweren.

Kienast (Küsnacht-Zürich).

Zygmund, Antoni: Note on the formal multiplication of trigonometrical series. Bull. Sémin. math. Univ. Wilno Nr 2, 52—56 (1939).

Unter dem formalen Produkt zweier trigonometrischer Reihen $(1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ und $(2) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$ versteht man die Reihe $(3) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}$ mit $C_n = \sum_{p+q=n} c_p \gamma_q$ (wobei die Reihen für die Koeffizienten C_n als konvergent im gewöhnlichen oder einem verallgemeinerten Sinne vorauszusetzen sind). Streben die Koeffizienten c_n von (1) gegen 0 für $|n| \rightarrow +\infty$, besteht ferner für (2) die Beziehung $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\nu| \leq n} |\gamma_\nu| < \infty$, so daß (2) die Fourierreihe einer stetigen Funktion $\lambda(x)$ ist, und verschwindet $\lambda(x)$ an einer Stelle x_0 , so konvergiert

die Produktreihe (3) an der Stelle x_0 gegen 0. — Das Hauptergebnis der Note besagt, daß in dem vorstehenden Satz die Voraussetzung über die Koeffizienten γ_n wesentlich abgeschwächt werden kann, wenn $\lambda(x)$ in einem die Stelle x_0 enthaltenden Intervall verschwindet. Es lautet: Streben die Koeffizienten c_n von (1) gegen 0 für $|n| \rightarrow +\infty$, ist ferner (2) absolut konvergent, damit die Fourierreihe einer stetigen Funktion $\lambda(x)$, und verschwindet $\lambda(x)$ in einem Intervall (a, b) , so konvergiert die Produktreihe (3) und die dazu konjugierte Reihe in jedem inneren Teilintervall von (a, b) gleichmäßig,

die Reihe (3) überdies gegen 0. — Unter den Voraussetzungen $c_n = o(n^k)$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^k |\gamma_n| < \infty$ ($k \geq 0$) wird eine analoge Aussage hinsichtlich der (C, k) -Summierbarkeit der Reihe (3) bewiesen. Die Arbeit schließt mit einer Bemerkung über entsprechende Sätze bez. der Cauchyschen Produktreihe zweier Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit konstanten Gliedern.
F. Lösch (Rostock).

Spezielle Funktionen:

MacRobert, T. M.: Some formulae for the associated Legendre functions of the first kind. Philos. Mag., VII. s. 27, 703—705 (1939).

Verf. berechnet ein bestimmtes Integral, dessen Integrand das Produkt einer Potenz einer Sinusfunktion und einer abgeleiteten Legendreschen Funktion ist. Bei der Ausführung der Rechnung wird eine Substitution benutzt, wodurch der erste Faktor rational wird, während der zweite Faktor als hypergeometrische Funktion dargestellt wird. Zweitens stellt Verf. eine abgeleitete Legendresche Funktion halbzahlgiger Ordnung als unendliches Integral über das Produkt einer Exponentialfunktion und einer Hankelschen Funktion dar. Bei der Berechnung wird die Hankelsche Funktion als unendliches Integral über das Produkt einer Exponentialfunktion und einer hyperbolischen Funktion dargestellt, worauf die Reihenfolge der Integration vertauscht wird. Verf. gibt die Gültigkeitsbedingungen für seine Formeln an und erwähnt, daß analoge Formeln auch für die abgeleiteten Legendreschen Funktionen zweiter Art aufgestellt werden können.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Meijer, C. S.: Zur Theorie der hypergeometrischen Funktionen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 42, 355—369 (1939).

The author gives a very general formula

$$\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma)\Gamma(\tau)F(a, b; c; z) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \int_0^1 F(\alpha, \beta, a, b; \sigma, \tau, c; zu)G(u) du$$

in which $G(u) = F(\alpha - \tau, \beta - \tau; \rho; 1 - u)(1 - u)^{e-1}u^{\sigma-1}$, $\rho = \alpha + \beta - \sigma - \tau$ the real parts of ρ, σ, τ are positive, $\alpha - 1, \beta - 1$ are not negative but $\alpha, \beta, \sigma, \tau$ are otherwise arbitrary. This formula includes some known formulae as particular cases. It is generalised for hypergeometric functions of higher order and the extension is used to obtain integral representations of products of Whittaker's confluent hypergeometric functions $M_{k,m}(z)$, $M_{k,m}(z)$, a modified Lommel function and products of Bessel functions. — Many other integrals involving generalised hypergeometric functions are evaluated.

H. Bateman (Pasadena).

MacRobert, T. M.: Solution in multiple series of a type of generalised hypergeometric equation. Proc. roy. Soc. Edinburgh 59, 49—54 (1939).

When $p > 1$ the generalised hypergeometric equation of order $p + 1$ with $p + 1$ parameters a_r and p parameters c_s has a symmetrical solution for the neighbourhood of $x = 1$,

$$(1 - x)^{a_p - s_{p+1}} \prod_{r=1}^p F(\sigma_r - s_r + \nu_{r-1}, c_r - a_{r+1}; \sigma_p - s_{p+1} + 1 - \nu_{r-1}; 1 - x)$$

where

$$s_r = a_1 + a_2 + \dots + a_r, \quad \sigma_r = c_1 + c_2 + \dots + c_r, \quad \nu_0 = 0, \quad \nu_r = n_1 + n_2 + \dots + n_s, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

This is expressed by a formula of continuation involving $p + 1$ series in powers of x each of which is a solution associates wit the singularity $x = 0$. This formula is proved

by induction. — A set of p further solutions which are not symmetrical in the parameters is also constructed.
H. Bateman (Pasadena).

Horn, J.: Über eine hypergeometrische Funktion zweier Veränderlichen. *Mh. Math. Phys.* **47**, 186—194 (1938).

Im Rahmen seiner umfangreichen Untersuchungen über hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen [Math. Ann. **105** (1931), **111** (1935), **113** (1936), **115** (1938), zitiert I—IV] s. dies. Zbl. **12**, 304; **14**, 348; **18**, 122] kommt Verf. auf das lineare partielle Differentialsystem 2. Ordnung zurück, dem die Humbertsche Reihe

$$\Phi_2(\beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(\beta, m) (\beta', n)}{(\gamma, m+n) (1, m) (1, n)} x^m y^n$$

genügt, und welches der Kummerschen Differentialgleichung $xy'' + (\gamma - x)y' - \beta y = 0$ bei einer unabhängigen Veränderlichen entspricht (vgl. I, 397ff., II, 665ff., III, 290ff., IV, 453ff.). Er gewinnt jetzt (auf zwei verschiedene Methoden) ein Fundamentalsystem formaler Lösungen, die, abgesehen von Faktoren e^x, e^y, x^e, y^e , divergente hypergeometrische Reihen nach steigenden Potenzen je zweier der Veränderlichen $x^{-1}, y^{-1}, (x+y)^{-1}$ sind. Es wird festgestellt, daß die Diagonalreihen dieser Potenzreihen gerade zu denjenigen Reihen nach homogenen Polynomen der betreffenden Veränderlichen führen, deren Gestalt Verf. früher (a. a. O. III) angegeben hatte, ohne die Koeffizienten vollständig auszurechnen, was also jetzt geleistet ist. Zum Schluß kurzer Hinweis auf die Bedeutung der Entwicklungen für die asymptotische Darstellung ihnen vermöge Laplacescher Integrale zugeordneter Lösungen ($x = at, y = bt; a, b$ fest, $t \rightarrow \infty$).
Hermann Schmidt (Jena).

Wilson, R.: A note on the zeros of the Bessel function. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, II. s. **6**, 17—18 (1939).

Verf. bringt die Besselsche Differentialgleichung durch eine bekannte Transformation auf eine Form, in der der erste Differentialquotient nicht vorkommt. Er benutzt die von Bôcher angegebenen Sturmschen Methoden zur Ableitung eines elementaren Beweises, daß jede Lösung der Besselschen Differentialgleichung mit reeller Ordnungszahl eine unendliche Anzahl positiver Nullstellen hat. Hierzu vergleicht er die transformierte Differentialgleichung mit der einfachsten Schwingungsdifferentialgleichung zweiter Ordnung. Nach einfacher Rechnung ergibt sich, daß die positiven Nullstellen der Besselschen Differentialgleichung mindestens in gleicher Anzahl vorhanden sind wie die Nullstellen einer Sinusfunktion. Weiterhin ergibt sich, daß für große Werte des Argumentes zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der Besselschen Funktion mindestens eine Nullstelle der Sinus- bzw. Kosinusfunktion liegt. Endlich ergibt sich, daß die positiven Nullstellen der Besselschen Funktion für große Werte des Argumentes mit den Nullstellen einer Kosinusfunktion nahezu zusammenfallen.
M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Müller, Reinhard: Über die zahlenmäßige Beherrschung und Anwendung einiger den Besselschen verwandten Funktionen nebst Bemerkungen zum Gebiet der Besselfunktionen. *Z. angew. Math. Mech.* **19**, 36—54 (1939) u. Berlin: Diss. 1939.

Numerical tables are given for the integrals of $J_0(ix)$ and $\frac{1}{2} H_0^{(1)}(ix)$ für values of x between 0 and 16 the intervals ranging from 0.1 to 0.4 and the values containing 6 figures or more. These tables are accompanied by similar tables for a related function

$\Phi(z)$ and its derivative, where $\Phi(z) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \exp(-z \sin a) da$. This function occurs in

v. Borbely's work on the vibrations of an airplane wing. — Many other functions can be tabulated with the aid of these tables and a discussion is given of the functions

$$f_{\nu, \mu}(z) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{\nu} t \cos^{\mu} t \exp(z \sin t) dt, \quad h_{\nu}(x) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \exp(-x \operatorname{cosec} t) \sin^{\nu} t dt \quad (x > 0)$$

and of some others. Particular attention is given to the functions occurring in the solution of the non-homogeneous differential equation of Bessel's type when the function on the right hand side of the equation can be expanded in a power series. *H. Bateman*.

Erdélyi, A.: On a paper by Copson and Ferrar. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 6, 11 (1939).

Vgl. dies. Zbl. 18, 60. Verf. kürzt den Weg zur Entwicklung der dort genannten Funktion $F(\lambda)$ erheblich ab. *Ullrich* (Gießen).

Giulotto, Virgilio: Funzioni ultracilindriche. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 72, 58—72 (1939).

Mit Hilfe eines Grenzüberganges, der dem bekannten Grenzübergang zur Gewinnung der Zylinderfunktionen aus den Kugelfunktionen nachgebildet ist, leitet der Verf. aus den ultrasphärischen Funktionen Nielsens eine Klasse von Funktionen her, die er als Ultrazylinderfunktionen $I^{\nu,n}(x)$ bezeichnet; sie genügen der Differentialgleichung $x^2 y'' + 2\nu x y' + [x^2 - n(n+2\nu-1)]y = 0$. Da bekanntlich $x^{\frac{1}{2}-\nu} Z_{n+\nu-\frac{1}{2}}(x)$, unter Z eine Zylinderfunktion verstanden, Lösung dieser Differentialgleichung ist — eine Tatsache, die nach langen Rechnungen am Schluß der Arbeit bewiesen wird —, ist weder der Zweck einer eigenen Namensgebung noch auch der einer besonderen Herleitung von Funktionalgleichungen, Integraldarstellungen sowie Reihenentwicklungen nach diesen Funktionen auf breitem Wege einzusehen. *Schoblik* (Brünn).

Bates, J. M.: Zeros of a class of polynomials associated with Bateman's k -function. Iowa State Coll. J. Sci. 12, 471—474 (1938).

By using Bottema's result (Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 34 (1931), this. Zbl. 2, 403) that if $-1 < k_\nu < 1$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) the roots of the equation $(z + b_{n+1})(z + b_n) = 4C_n^2/(1 - k_n)(1 + k_{n+1})$ furnish limits for the zeros of a function $U_n(x)$ which satisfies a difference equation of type $U_n(x) - (x + b_n)U_{n-1}(x) + C_{n-1}^2 U_{n-2}(x) = 0$ the author finds that the zeros lie in the range $0 \leq x < 2n - 1$ when $U_n(x)$ is the polynomial defined by means of the generating function $\exp[2xt/(1+t)]$ and $b_n = 1 - n$, $2C_n = (n^2 - n)^{\frac{1}{2}}$. An expansion in powers of $1/4n^2$ is obtained from the differential equation satisfied by $e^{-x}U_n(x)$, it gives an expression valid for the small roots the coefficients being polynomials in a quantity α which is a root of the transcendental equation $t^{\frac{1}{2}}J_1(2t^{\frac{1}{2}}) = 0$ where $J_n(z)$ is the Bessel function of order n . To find an asymptotic form for large roots the author changes the independent variable in the differential equation from x to y where $y(2n)^{\frac{1}{2}} = 2n - x$. The root is then expanded in powers of $(2n)^{-\frac{1}{2}}$ the coefficients being polynomials in a quantity β which is a root of the equation $0 = J_{\frac{1}{2}}(2/3x^{\frac{1}{2}}) + J_{-\frac{1}{2}}(2/3x^{\frac{1}{2}})$. The first 5 and the last 5 roots are calculated for the case in which $n = 40$. *H. Bateman* (Pasadena).

Taylor, W. C.: A complete set of asymptotic formulas for the Whittaker function and the Laguerre polynomials. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 18, 34—49 (1939).

Mit Hilfe einer von Langer herrührenden Methode zur Gewinnung von Näherungslösungen gewisser Differentialgleichungen 2. Ordnung werden asymptotische Darstellungen der Whittakerschen Funktionen $W_{k,m}(z)$ bzw. $M_{k,m}(z)$ — k, m, z komplex — für $k \rightarrow \infty$, beschränktes m und solche Werte von z hergeleitet, für die entweder a) $|z| > N \cdot |k|^{-1+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) oder b) $z = O(k^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$ gilt. Insbesondere ergeben sich hieraus durch Spezialisierung asymptotische Darstellungen der verallgemeinerten Laguerreschen Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ für großes positiv-reelles x . *Schoblik* (Brünn).

Erdélyi, Artur: Bilineare Reihen der verallgemeinerten Laguerreschen Polynome. S.-B. Akad. Wiss. Wien 147, 513—520 (1938).

Verf. zeigt, daß alle bisher bekannten bilinearen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n^{(\alpha)}(x) \varphi_n^{(\alpha)}(y)$ der verallgemeinerten Laguerreschen Orthogonalfunktionen

$$\varphi_n^{(\alpha)}(x) = \left[\frac{e^x x^{-\alpha}}{n! \Gamma(n + \alpha + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}),$$

insbesondere also außer den beiden bereits früher von ihm selbst angegebenen Fällen $\lambda_n = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + \beta)}$ und $\lambda_n = n + \alpha$ auch der kürzlich von Watson hergeleitete Fall $\lambda_n = n + 1$ Sonderfälle einer gleichfalls vom Verf. stammenden Bilinearreihe konfluenter hypergeometrischer Funktionen sind. Durch Vergleich der beiden erstgenannten Bilinearreihen mit der erzeugenden Funktion für die Produkte $n! \varphi_n^{(\alpha)}(x) \varphi_n^{(\alpha)}(y)$ werden ferner zwei Integralumformungen gewonnen. *Schoblik (Brünn).*

Broggi, U.: Sui polinomi di Laguerre e su una limitazione di G. Szegő. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 1, 213—217 (1939).

Es sei $L_n(t)$ das n -te Laguerresche Polynom. Nach Tricomi (dies. Zbl. 11, 204) gilt für $\Re(s) > 0$ die Beziehung $\int_0^{+\infty} e^{-ts} L_n(t) dt = \frac{1}{s} \left(\frac{s-1}{s} \right)^n$. Verf. zeigt, wie man daraus

leicht die Fundamenteigenschaften der Polynome $L_n(t)$ ableiten kann, findet dann rasch die bekannte Szegösche Abschätzung $|L_n(t)| < e^{t/2}$, ($t > 0$) [Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi, Math. Z. 1, 341—356 (1918)], und

zeigt schließlich, daß, wenn $f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-ts} \varphi(t) dt = 0$ für $\Re(s) > \mu$ gilt, $\varphi(t)$ fast überall verschwindet. *Giovanni Sansone (Firenze).*

Busbridge, Ida W.: The evaluation of certain integrals involving products of Hermite polynomials. J. London Math. Soc. 14, 93—97 (1939).

Verf. betrachtet ein unendliches Integral über das Produkt einer Exponentialfunktion und vier Hermite'scher Funktionen mit verschiedenem Index. Sie stellt jede der Hermite'schen Funktionen durch eine Konturintegralformel in der komplexen Ebene dar. Diese Formel setzt sie in das unendliche Integral ein und wertet dies aus durch Umkehrung der Integrationsfolge. Wenn die Summe der Indizes der Hermite'schen Funktionen eine ungerade Zahl ist, verschwindet das Integral. Im Falle, daß diese Summe eine gerade Zahl ist, ergibt sich unter gewissen Bedingungen ein endlicher Summenausdruck. Verf. wendet ihr Ergebnis auf den Sonderfall an, daß der Integrand nur drei Hermite'sche Funktionen enthält. Das Ergebnis dieses Integrals gibt Anlaß zu einer Formel, wobei das Produkt zweier Hermite'scher Funktionen mit verschiedenem Index durch eine endliche Summe von anderen Hermite'schen Funktionen dargestellt wird, wobei die Koeffizienten angegeben werden. *M. J. O. Strutt.*

Giulotto, Virgilio: Polinomi di Hermite e di Didon nel dominio iperarmonico. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 72, 37—57 (1939).

Die in der vorliegenden Arbeit eingeführten, mit Hilfe erzeugender Funktionen durch die Gleichungen (1) $\dots (1 - 2a_1x_1 - \dots - 2a_nx_n + a_1^2 + \dots + a_n^2)^{-\frac{n}{2} + 2 - 1} = \sum a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} V_{m_1 \dots m_n}^q(x_1, \dots, x_n)$ bzw. (2) $\dots [(1 - a_1x_1 - \dots - a_nx_n)^2 + (a_1^2 + \dots + a_n^2)(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)]^{q-3/2} = \sum a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} U_{m_1 \dots m_n}^q(x_1, \dots, x_n)$ definierten Polynome $V_{m_1 \dots m_n}^q(x_1, \dots, x_n)$ und $U_{m_1 \dots m_n}^q(x_1, \dots, x_n)$ stellen Verallgemeinerungen der für $n = 2$ von Hermite und für $n > 2$ von Didon angegebenen Polynome $V_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n)$ bzw. $U_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n)$ dar, mit denen sie auch für $q = 1$ identisch werden. Sie stehen in engster Beziehung zur q -mal iterierten Laplaceschen Gleichung $\Delta \Delta \dots \Delta \varphi = 0$: bezeichnet nämlich $\varrho = [(z_1 - a_1)^2 + \dots + (z_n - a_n)^2 + z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2]^{\frac{1}{2}}$ den Abstand des Punktes (z_1, \dots, z_{n+2}) im $n + 2$ -dimensionalen euklidischen Raum vom Punkt $(a_1, \dots, a_n, 0, 0)$, so ist $\varrho^{-(n+2-2q)}$ Lösung dieser Gleichung (in der Benennung des Verf. q -harmonische Funktion) und die linke Seite von (1) ist gleich ihrem Wert für die Punkte der Einheitskugel $r^2 \equiv z_1^2 + \dots + z_{n+2}^2 = 1$, ausgedrückt in den mit den kartesischen Koordinaten z_1, \dots, z_{n+2} durch die Transformationsgleichungen

$$z_i = r x_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad z_{n+1} = r \sqrt{1 - \sum_1^n x_i^2} \cos \varphi, \quad z_{n+2} = r \sqrt{1 - \sum_1^n x_i^2} \sin \varphi$$

verknüpften zonalen Koordinaten x_1, \dots, x_n . Ähnliches gilt für die linke Seite von (2). — Unter anderem werden Zusammenhänge der neu eingeführten Funktionen mit bereits früher vom Verf. betrachteten, die Legendreschen Polynome verallgemeinernden Funktionen aufgedeckt. *Schoblik* (Brünn).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Hukuhara, Masuo: Sur la forme des courbes intégrales dans le voisinage d'un point singulier d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 21, 183—190 (1939).

In der Differentialgleichung $y' = (P_0(x; y) + P_1(x; y)) : (Q_0(x; y) + Q_1(x; y))$ seien P_0 und Q_0 homogene, relativ prime Polynome vom Grad m . P_1 und Q_1 seien stetige, für $r \rightarrow 0$ schneller als P_0 und Q_0 nach 0 konvergierende Zusatzglieder. In Polarkoordinaten lautet sie: $r \cdot dr/d\varphi = (F(\varphi) + f(r; \varphi)) : (G(\varphi) + g(r; \varphi))$. $\varphi = 0$ sei eine k -fache Wurzel von $F(\varphi) = 0$, k sei gerade, $G(0) = G_0 > 0$ und $\lim_{\varphi \rightarrow 0} (F(\varphi) : \varphi^k) = C > 0$. — In der Nähe von $r=0, \varphi=0$ kann man setzen $(F(\varphi) + f(r; \varphi)) : (G(\varphi) + g(r; \varphi)) \leq A \cdot \varphi^k + B(r)$, wobei $A > 0$ und $B(r) \geq 0$ sei. Wenn es eine Funktion $\eta(r)$ gibt, so daß $A \cdot \left\{ \int_0^r \frac{B(r)}{r \cdot \eta(r)} dr \right\}^{k-1} \leq \frac{r \cdot \eta'(r)}{\eta(r)^k}$ ist, so verhalten sich die Integralkurven der gegebenen Differentialgleichung in der Nähe von $r=0, \varphi=0$ wie die der Differential-

gleichung $y' = P_0(x; y) : Q_0(x; y)$. Durch Einsetzen von $\eta(r) = \left(\frac{1-\lambda}{k-1} \right)^{\frac{1}{k-1}} |\lg r|^{-\frac{1-\lambda}{k-1}}$ ($\lambda < 1$) bzw. $\eta(r) = \frac{1}{|\lg r|}$ erhält man die von Lonn (vgl. dies. Zbl. 19, 257) bzw. Forster (vgl. dies. Zbl. 17, 258) gegebenen Bedingungen. — Setzt man $A = C : [(1 + \sigma) \cdot G_0]$ und $B(r) \leq f(r; \varphi) : [(1 + \sigma) \cdot G_0]$ für $r \leq \varepsilon$; $|\varphi| \leq \varepsilon$ ($\sigma > 0$), so wird

$$(F(\varphi) + f(r; \varphi)) : (G(\varphi) + g(r; \varphi)) \geq A \cdot |\varphi|^k + B(r).$$

Ist dann für alle λ , für die $0 < \lambda \leq 1$ ist,

$$\lim_{r \rightarrow 0} (k-1) A |\lg r|^\lambda \left\{ \int_0^r B(r) |\lg r|^{\frac{1-\lambda}{k-1}} \frac{dr}{r} \right\}^{k-1} \geq 1 - \lambda + \delta, \quad (\delta > 0)$$

so geht keine Integralkurve durch ($r=0; \varphi=0$). Diese Bedingung enthält eine von Lonn, a. a. O., als Spezialfall.

H. Forster (München).

Lemke, H.: Über eine Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung. J. reine angew. Math. 180, 141—188 (1939).

L'A. studia ampiamente l'equazione differenziale del primo ordine $Y' + a_1 Y^3 + 3a_2 Y^2 + 3a_3 Y + a_4 = 0$. Supposto che Y_0 sia un suo integrale particolare, se $\varphi(x)$ è tale che, $\frac{1}{3} \frac{d \log \varphi(x)}{d\lambda} + a_1 Y_0^2 + 2a_2 Y_0 + a_3 = 0$, essa con la trasformazione $Y = z\varphi(x) + Y_0$ assume la forma normale (*) $\frac{dz}{dx} = r_1 z^2 - r_0 z^3$, e questa, con la trasformazione $z = -1/y$ assume l'altra forma normale (**) $y \frac{dy}{dx} = r_0 + r_1 y$. L'A. nel Cap. I costruisce gli invarianti differenziali della (*) relativi alle trasformazioni del tipo $z = \mu(x)\zeta + z_0$, dove z_0 è un integrale particolare della (**), e $\mu = z_0^2 \exp(-\int r_0 z_0^2 dx)$. L'equazione trasformata assume la forma $\frac{d\zeta}{dx} = \varrho_1 \zeta^2 - \varrho_0 \zeta^3$, e l'A. osserva come a questa trasformazione siano connessi l'invariante (di P. Appell e R. Liouville) $S = \frac{r_1}{\sqrt{r_0}} \left(\frac{r'_1}{r_1} - \frac{r'_0}{r_0} - \frac{2}{9} \frac{r_1^2}{r_0} \right)$, e l'altro invariante $H = (3r'_0 + 2r_1^2)/r_0$. Nota poi che la (*) con la trasformazione $3z = r_1/r_0 - \varrho/r_0^{1/2}$ si riduce all'equazione $\frac{d\varrho}{dx} = S + \frac{1}{6} H \varrho - \frac{1}{9} \varrho^3$ che per $S=0$ è un'equazione di Bernoulli, mentre per $S \neq 0$, col successivo cangiamento $\varrho = -3^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}} \lambda$, $x_1 = -3^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \int S^{\frac{1}{2}} dx$, dove k è una costante qualunque

diversa da zero, (***) perviene all'equazione $\frac{d\lambda}{dx} = \lambda^2 + L\lambda + k$, con L espresso per mezzo degli invarianti con la relazione $L = 3^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d \log S}{dx} - \frac{1}{2} H \right) S^{-\frac{1}{2}}$. L'A. si ferma poi a considerare minutamente casi particolari nei quali r_0 e r_1 sono polinomi dei gradi $2n + 1$, e n rispettivamente. — Nel Cap. II l'A. suppone che l'equazione (**) ammetta n integrali particolari che soddisfino un'equazione algebrica di grado n con coefficienti funzioni algebriche della x ; i casi $n = 2$, $n = 3$ sono completamente approfonditi. — Nel Cap. III, l'A. deduce dalla conoscenza di un certo numero di integrali particolari, soddisfacenti opportune relazioni lineari non omogenee, l'esistenza di un fattore integrante, e in alcuni casi arriva all'integrazione algebrica dell'equazione. — Nel Cap. IV infine, l'A. particolarizzando i coefficienti e trasformando l'equazione in una del secondo ordine, non lineare, la cui integrazione si consegue mediante integrali ellittici e iperellittici, deduce una classe di trasformazioni non lineari mediante le quali tali equazioni si trasformano in se o in altre di natura simile. *Giovanni Sansone. (Firenze).*

Makai, E.: Über eine Eigenwertabschätzung bei gewissen homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Compositio Math.* 6, 368—374 (1939).

Das Randwertproblem $y'' + \lambda \rho(x)y = 0$, $y(a) = y(b) = 0$ mit $\rho(x) \geq 0$ im Integrationsintervall gestattet die bekannte obere Eigenwertabschätzung $\lambda_n \leq \frac{n^2 \pi^2}{(b-a)^2 \cdot \rho_{\min}}$ und das asymptotische Gesetz

$$\lambda_n \sim \left[\pi n : \int_a^b \sqrt{\rho(x)} dx \right]^2. \quad (1)$$

Die Arbeit entwickelt eine hinreichende Bedingung dafür, daß dieses asymptotische Gesetz zugleich eine obere Eigenwertabschätzung liefert, also

$$\lambda_n \leq \left[\pi n : \int_a^b \sqrt{\rho(x)} dx \right]^2 \quad (2)$$

wird; sie lautet $\rho'^2 - \rho \rho'' > 0$ und ist insbesondere erfüllt, wenn $\rho''(x) < 0$ für $a \leq x \leq b$ gilt. Der Beweis benutzt die Gleichwertigkeit der Sturm-Liouvilleschen Randwertaufgabe mit einem Variationsproblem. Daß in (2) die Konstante π durch keine kleinere ersetzt werden kann, ist nach (1) klar, wird aber an Beispielen nochmals bestätigt. *Harald Geppert (Gießen).*

Cesari, Lamberto: Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari. *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. 8, 131—148 (1939).

In der Differentialgleichung (1) $y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \dots + f_n(x)y = 0$ mögen $f_\lambda(x)$ ($\lambda = 1, 2, \dots, n$) für $x > x_0$ stetige komplexwertige Funktionen bedeuten; dann heißt ein Integral $\bar{y}(x)$ stabil, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein δ gibt derart, daß für jedes

weitere Integral $y(x)$ von (1), das die Ungleichung $\sum_{i=0}^n |y^{(i)}(x) - \bar{y}^{(i)}(x)| < \varepsilon$ erfüllt, auch die Ungleichung $\sum_{i=0}^n |y^{(i)}(x_0) - \bar{y}^{(i)}(x_0)| < \delta$ gilt. Verf. beweist in vorliegender

Arbeit den folgenden wichtigen Satz: Existieren die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \infty} f_\lambda(x) = a_\lambda$, und sind die Funktionen $f_\lambda(x) - a_\lambda$ im Intervall $(x_0, +\infty)$ absolut integrierbar, sind ferner alle Integrale der Differentialgleichung $z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z = 0$ stabil, so sind auch alle Integrale von (1) stabil. *C. Miranda (Genova).*

Faedo, S.: Sulla singolarità degli integrali dei sistemi di equazioni differenziali lineari in un punto singolare per i coefficienti. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 29, 108—116 (1939).

Verf. behandelt das System

$$x^m y_k^{(m)} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m x^{m-k} A_{ik}^{(h)}(x) y_i^{(m-k)} = 0 \quad (h = 1, \dots, n)$$

für n gesuchte Funktionen $y_1(x), \dots, y_n(x)$; dabei sind die $A_{ik}^{(h)}$ gegebene Funktionen, die an der Stelle $x = 0$ regulär sind. Für $n = 1$ ist das eine einzige Differentialgleichung

m -ter Ordnung, und für $m = 1$ ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung. Die für diese Sonderfälle bekannte Methode der Lösung durch Potenzreihen wird auf den vorliegenden Fall übertragen. Kamke (Tübingen).

Reid, William T.: Some remarks on linear differential systems. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 414—419 (1939).

Es wird die Eigenwertaufgabe

$$y' = [A(x) + \lambda B(x)] y, \quad My(a) + Ny(b) = 0 \quad (1)$$

behandelt. Dabei ist λ eine komplexe Zahl; x eine reelle Veränderliche im Intervall $a \leq x \leq b$; $y(x)$ ein n -gliedriger Vektor, dessen Elemente stetig differenzierbare Funktionen von x sind; $A(x)$ und $B(x)$ sind n -reihige quadratische Matrizen, deren Elemente stetige Funktionen von x sind; M und N konstante n -reihige quadratische Matrizen, derart, daß die Randbedingungen, die ja aus n Gleichungen bestehen, voneinander linear unabhängig sind. Es handelt sich also um eine Eigenwertaufgabe für ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen. Für den Fall, daß die gegebenen Matrizen nur reelle Elemente haben, war diese schon von Bliss, Trans. Amer. Math. Soc. **28**, 561—584 (1926) eingehend untersucht worden. Hier dürfen nun diese Matrizen komplexe Elemente haben. Sind P, Q konstante Matrizen, derart, daß die v -ten Spalten p, q von P, Q für $v = 1, \dots, n$ gerade n linear unabhängige Lösungen der Gleichungen $Mp - Nq = 0$ bilden, so nennt Verf. die Eigenwertaufgabe

$$u' = -u[A(x) + \lambda B(x)], \quad u(a)P + u(b)Q = 0 \quad (2)$$

konjugiert-adjungiert zu (1). Die Aufgabe (1) heißt selbst-konjugiert-adjungiert (self-conjugate adjoint), wenn (1) und (2) ineinander übergeführt werden können durch eine lineare Transformation $u = T(x)y$, deren Elemente stetig differenzierbare Funktionen von x sind und deren Determinante $\neq 0$ ist. Dafür, daß ein solches System vorliegt, wird ein Kriterium aufgestellt. Aus den selbst-konjugiert-adjungierten Aufgaben werden bestimmt selbst-konjugiert-adjungierte (definitely self-conjugate adjoint) Aufgaben ausgesondert. Diese haben nur reelle Eigenwerte. Dieser Satz wird erweitert zu einem Satz über den Arcus der Eigenwerte bei etwas allgemeineren Aufgaben. — Zum Schluß werden zwei Sätze über Matrixdifferentialgleichungen $Y'(x) = H(x)Y + YK(x)$ und $Y'(x) + YE(x)Y = R(x)$ hergeleitet. Diese Sätze werden auf die von Whyburn [Amer. J. Math. **56** (1934), dies. Zbl. **10**, 111] betrachtete Riccatische Matrixdifferentialgleichung $Y' + YY = R(x)$ angewendet. Man erhält damit ein etwas allgemeines Ergebnis. Kamke (Tübingen).

Hebroni, P.: Sur les équations différentielles linéaires dans un anneau de certaines matrices continuïssées (matrices hyperboliques) et leurs applications à certaines équations intégraldifférentielles. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1268—1270 (1939).

Verf. gibt eine weitere Verwirklichung für die von ihm früher entwickelte Axiomatik der linearen Differentialsysteme [s. Comp. Math. **5** (1938); **6** (1938); dies. Zbl. **19**, 63; **20**, 23]. Es handelt sich diesmal um einen Ring aus Elementen der Form $a_0(s, t)\varepsilon_0 + a_1(u)\varepsilon_1 + a_2(u)\varepsilon_2$ mit einem, eine einzige Integration enthaltenden Prozeß als „Multiplikation“. Wieder bilden die differenzierbaren Elemente der Form $a_0\varepsilon_0$ ein zweiseitiges Ideal I im Ring aller differenzierbaren Elemente, und die Theorie liefert für $(y) \in I$ ähnlich wie früher Auflösungssätze für Integrodifferentialgleichungen wie $y'_0 = \sigma_2(y_0/a)$ und ähnliche; hiebei bedeutet $\sigma_2(y_0/a)$ den Integralprozeß, der für $(y) \in I$ aus dem Produkt $(y)(a)$ hervorgeht. Hermann Schmidt.

Dehousse, L.: Sur les solutions singulières d'un système d'équations différentielles. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **8**, 201—207 (1939).

En utilisant un théorème de V. Leclercq sur les fonctions implicites [Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. sér. **11**, 2^e partie, 26 et 27 (1922)], L. Dehousse étend les résultats donnés par Em. Picard sur les solutions singulières d'un système d'équations différentielles (n équations du premier ordre à n fonctions inconnues) à des cas plus généraux que ceux qui ont été indiqués par ce dernier auteur au tome III de son Traité d'Analyse (p. 52 et suiv., 1928). Janet (Caen).

Minzoni, Antonio: Su un problema ai limiti per un sistema di due equazioni differenziali del 1° ordine. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **9**, 142—149 (1938).

L'A. démontre d'une manière élémentaire le théorème d'existence pour le système:

$$y' = f(x, y, z), \quad z' = g(x, y, z), \quad y(a) = y_0 \quad z(b) = z_0 \quad (a < b)$$

en supposant successivement que f et g sont continues, limitées ou infinies d'ordre < 1 par rapport à $|y| + |z|$ dans le domaine: $a \leq x \leq b$ de l'espace (x, y, z) .

N. Cioranescu (Bukarest).

Zwirner, Giuseppe: Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del quarto ordine. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 9, 150—155 (1938).

En faisant usage d'une proposition due à R. Caccioppoli, l'A. donne une démonstration pour le théorème d'existence de l'équation: $y^{(IV)} = f(x, y, y', y'', y''')$ correspondant aux conditions aux limites: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $y(x_1) = y_1$, $y'(x_1) = y'_1$ en supposant f continue et limitée pour $x_0 \leq x \leq x_1$ et y, y', y'', y''' arbitraires.

N. Cioranescu (Bukarest).

Zwirner, Giuseppe: Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 3, 57—70 (1939).

Ein Existenzsatz für die Randwertaufgabe $y'' = f(x, y, y')$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$, wobei f erklärt ist in der Punktmenge C : $a \leq x \leq b$, $\sigma(x) \leq y \leq \tau(x)$, $|y'| < +\infty$. Verf. beweist, daß die Aufgabe unter den folgenden Bedingungen lösbar ist: I. f stetig in bezug auf (y, y') und meßbar in bezug auf x ; II. $f = g_1 + g_2$, wo $g_1(x, y, y')$ beschränkt ist in jeder beschränkten Teilmenge von C und $|g_2(x, y, y')| \leq \omega(x)$, mit $\omega(x) \geq 0$ über $\langle a, b \rangle$ summierbar; III. $|f(x, y, y')| = \psi(y) \varphi(y') + \chi(x)$, mit $\chi(x) \geq 0$ über $\langle a, b \rangle$ und $\psi(y) \geq 0$ über jeder beschränkten Punktmenge summierbar;

$\varphi(y') > 0$ stetig, $\int_0^{+\infty} \frac{y'}{\varphi(y')} dy' = \int_0^{-\infty} \frac{y'}{\varphi(y')} dy' = +\infty$ und $\left| \frac{y'}{\varphi(y')} \right| < \text{const}$ [diese Bedingung

kann fortgelassen werden, wenn $\chi(x) \equiv \omega(x) \equiv 0$]; IV. f erfüllt eine verallgemeinerte Lipschitzsche Bedingung in bezug auf y, y' ; V. $\sigma(x) < \tau(x)$, $\sigma'(x)$, $\tau'(x)$ stetig;

VI. $\sigma'(x) - \int_a^x f(u, \sigma(u), \sigma'(u)) du$, $\int_a^x f(u, \tau(u), \tau'(u)) du - \tau'(x)$ in $\langle a, b \rangle$ monoton nicht abnehmend. — Vgl. für stetige f mit $\psi(y) = 1$, Nagumo, dies. Zbl. 17, 308; für I. genügende f und $\psi = 1$, Scorza Dragoni, dies. Zbl. 20, 223. Nach dem Verf. soll sich die Voraussetzung IV. wahrscheinlich als überflüssig erweisen.

G. Scorza Dragoni (Padova).

Germa, R.-H.-J.: Sur des fonctions associées aux solutions des équations aux différentielles totales, complètement intégrables, à coefficients linéaires. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 8, 189—200 (1939).

Die vollständig integrierbare Pfaffsche Gleichung (1) $dz = \{A(x, y)z + B(x, y)\} dx + \{C(x, y)z + D(x, y)\} dy$ wird durch die allgemeinere Integralgleichung (2) $z(x, y) = z_0 + \int_{x_0}^x B(u, y) du + \int_{y_0}^y D(x_0, v) dv + \lambda \left\{ \int_{x_0}^x A(u, y) z(u, y) du + \int_{y_0}^y C(x_0, v) z(x_0, v) dv \right\}$, worin λ einen Parameter bedeutet, ersetzt. Geht man darin mit dem Ansatz $z(x, y; \lambda) = Z_0(x, y) + \lambda Z_1(x, y) + \lambda^2 Z_2(x, y) + \dots$ ein, so führt der Vergleich von Koeffizienten bei gleichen Potenzen von λ zur Bestimmung der Funktionen $Z_n(x, y)$ und zu der einzigen Lösung $z(x, y; \lambda)$ von (2), die sich für $x = x_0$, $y = y_0$ auf z_0 reduziert. Mittels einiger Transformationen kann diese Lösung auf die folgende Form gebracht werden, wobei G, H, K, L geeignete Funktionen bedeuten: $z(x, y; \lambda) = z_0 G(x, y; \lambda) + \int_{x_0}^x B(u, y) H(x, y; u; \lambda) du + \int_{y_0}^y D(x_0, v) K(y; v; \lambda) dv + L(x, y; \lambda)$. Für $\lambda = 1$ ergibt sich die Lösung von (1).

O. Borůvka (Brünn).

Kourensky, M.: Sur l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, dont dépend le problème de la déformation d'une congruence isotrope. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 4, 47—60 (1938) [Ukrainisch].

L'au. s'occupe avec l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles de premier ordre à deux fonctions inconnues d'un problème sur les congruences isotropes par une méthode d'Hamburger et deux autres méthodes appartenant à lui.

N. Obrechhoff (Sofia).

Malmheden, Harry: Über Systeme von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Fysiogr. Sällsk. Lund Förh. 8, 26—34 (1939).

Für das System partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{k=1}^N \left(\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N A_{jk}^{mn} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} + \sum_{m=1}^N B_{jk}^m \frac{\partial}{\partial x_m} + C_{jk} \right) u_k = f_j$$

werden unter Benutzung der üblichen Matrizenschreibweise die Greensche Formel und die Grundlösung aufgestellt. Es folgt ein Beispiel. *G. Cimmino (Cagliari).*

Tolotti, C.: Sul problema di Cauchy. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 29, 119—125 (1939).

Die Lösung $u(\varrho, \theta)$ der Gleichung $\Delta^n u(\varrho, \theta) = 0$ (wobei Δ der Laplacesche Operator in Polarkoordinaten ϱ, θ ist), die auf dem Kreis $\varrho = r$ samt ihren $n - 1$ ersten Ableitungen nach ϱ vorgegebene Werte $f_k(\theta)$ annimmt ($k = 0, 1, \dots, n - 1$), falls die $f_k(\theta)$ 2π -periodische analytische Funktionen von θ sind, ist im Kreisring $re^{-\sigma} < \varrho < re^{\sigma}$ analytisch, wobei σ das Minimum des Konvergenzradius der die $f_k(\theta)$ darstellenden Potenzreihen bezeichnet. Sind insbesondere die $f_k(\theta)$ ganze Funktionen, so ist $u(\varrho, \theta)$ in der punktierten Ebene $\varrho > 0$ analytisch. Der Beweis geht von einem Verfahren von Picone (s. dies. Zbl. 14, 261) aus. *G. Cimmino (Cagliari).*

Saltykow, N.: Invariants canoniques d'un groupe fonctionnel. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1861—1863 (1939).

Etant donné l'équation aux dérivées partielles (1) $F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$, l'équation linéaire correspondente (2) $(F, f) = 0$ ayant un groupe de r intégrales distinctes en involution: (3) f_1, f_2, \dots, f_r ($r < n$), N. Saltykow a donné précédemment (voir ce Zbl. 3, 113) le système complet canonique des intégrales distinctes du système linéaire $(f_i, f) = 0$ sous la forme $f_1 f_2 \dots f_r, \varphi_1 \dots \varphi_{n-r}, \psi_1 \dots \psi_{n-r}$ (invariants canoniques). Dans des cas très généraux, F est de la forme $\Psi(f_1, f_2, \dots, f_r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-r},$

$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-r})$ et (2) est remplacée par $\sum_{i=1}^{i=n-r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_i} - \frac{\partial \Psi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} \right) = 0$ où les f figurent

à titre de paramètres constants; (1) est remplacée par $\Psi = 0$ où les ψ sont indépendantes, où les φ sont les dérivées partielles, par rapport aux ψ , de la nouvelle fonction inconnue, et où les f sont des constantes. Ce résultat (qui peut d'ailleurs s'étendre à un système) généralise un théorème donné précédemment par le même auteur (voir ce Zbl. 7, 406). Il en est fait ici une application: réduction au 4^e ordre du système canonique du problème des 3 corps „en variables de Delaunay“. *Janet (Paris).*

Giraud, Georges: Sur un type de problèmes relatifs aux équations du type elliptique à deux variables indépendantes. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1462—1465 (1939).

Anwendung der vom Verf. entwickelten Hauptwertintegralgleichungstheorie auf das allgemeine Randwertproblem für die elliptische partielle Differentialgleichung

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + cu = f,$$

wobei die $a_{\alpha\beta}$ einer Hölderbedingung (mit beliebigen Exponenten) genügen und die b_α, c, f als stetig vorausgesetzt werden; die in der Randbedingung $c_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \psi u = \varphi$ auftretenden Funktionen c_α, ψ, φ sollen auch einer Hölderbedingung genügen, und es ist nicht ausgeschlossen, daß c_1, c_2 Komponenten eines die Randkurve berührenden Vektors sind. — Die Lösung u kann entweder für ein beliebiges Funktionenpaar $\{f, \varphi\}$ oder nur für solche Funktionenpaare, die eine gewisse Anzahl s von linearen Bedingungen erfüllen, existieren; in diesem letzten Falle hängt u von einer Anzahl r von willkürlichen Parametern ab, die nicht notwendig gleich s zu sein braucht. Einen Fall, wo immer $r = s$ sein muß, hat man, wenn c_1, c_2 nie Komponenten eines der negativen Halbtangente gleichsinnigen Vektors werden. *G. Cimmino (Cagliari).*

Chiellini, Armando: Sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari omogenee, di ordine qualunque. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 9, 10—25 (1939).

Die kennzeichnende Bedingung dafür, daß die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + \binom{n}{2} p_2(x) y^{(n-2)} + \binom{n}{3} p_3(x) y^{(n-3)} + \dots + p_n(x) y = 0 \quad (1)$$

mittels einer Substitution des Typus $\xi = \varphi(x)$, $y = \lambda(x) z(x)$ in eine andere mit konstanten Koeffizienten transformierbar sei, ist bekanntlich die, daß die $n - 2$ absoluten Fundamentaldifferentialinvarianten von (1) konstant seien. Verf. zeigt, daß, wenn diese Bedingung erfüllt ist und überdies $\theta_3 = p_3 - \frac{3}{2} p_2' \neq 0$ gilt, dann die gewünschte Substitution von den Formeln $\xi'' : \xi' = 2(1 - n)^{-1} \lambda' : \lambda = \theta_3 : \theta_3'$ geliefert wird. Auch der Fall $\theta_3 \equiv 0$ wird vollkommen untersucht. C. Miranda.

Moisil, Gr. C.: Sur l'application de la méthode d'intégration de M.M. Hadamard et Théodoresco à l'étude des équations aux dérivées partielles à deux variables. C. R. Acad. Sci. Roum. 3, 273—274 (1939).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Viola, T.: Deformazione di prismi rettangolari cavi, a pareti sottili, soggetti a torsione. Boll. Un. Mat. Ital., II. s. 1, 135—141 (1939).

Verf. hat zusammen mit C. Minelli die Deformation eines hohlen rechteckigen dünnwandigen Prismas untersucht, das auf der einen Seite von einem Scharnier begrenzt wird und auf der anderen von einem Torsionsmoment beansprucht wird. In der vorliegenden Zusammenfassung, die im wesentlichen der mathematischen Seite der Frage gewidmet ist, zeigt Verf., daß sich das Problem unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit auf die Bestimmung einer Konstanten γ_1 und zweier Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$ reduziert, die für $x = l$ verschwinden und das Integral

$$\int_0^l \left\{ \alpha (y_1' + \gamma_1)^2 + \beta \left(y_2' - \frac{h}{b} \gamma_1 \right)^2 + M \left(\frac{y_1'}{b} + \frac{y_2'}{h} \right) \right\} dx.$$

in dem α , β , h , b , M bekannte Konstanten bedeuten, zum Minimum machen. Zwar hat dieses Integral ein Minimum, aber der Extremalensatz (γ_1 , y_1 , y_2) ist nicht eindeutig bestimmt. Die mechanische Deutung dieses Ergebnisses besagt, daß das Prisma unendlichviele deformierte Zustände besitzt, denen ein einziger Spannungszustand entspricht. Die Deformation wird eindeutig bestimmt, wenn man eine geeignete weitere Zwangskraft einführt, die keiner weiteren Beanspruchung unterliegt.

C. Miranda (Genova).

Mathisson, Myron: Le problème de M. Hadamard relatif à la diffusion des ondes. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1776—1778 (1939).

Recherche de toutes les équations linéaires du type hyperbolique normal pour lesquelles il n'y a pas de diffusion; l'auteur les nomme équations à ondes pures; il s'agit uniquement des équations à quatre variables. Résultat: ces équations sont l'équation des ondes sphériques et celles qui s'y ramènent en multipliant le premier membre par une fonction quelconque, en transformant ponctuellement les variables et en changeant linéairement l'inconnue.

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Cooper, J. L. B.: A mixed boundary value problem. J. London Math. Soc. 14, 124—128 (1939).

Verf. stellt sich die Aufgabe, eine harmonische Funktion $u(x, y)$ in dem Streifen $0 \leq y \leq 1$, $-\infty < x < +\infty$ zu bestimmen, die den Grenzbedingungen $u(x, 0) = 0$, $u_y(x, 1) = k u(x, 1)$ genügt. Im Gegensatz zu den verschiedenen Lösungen dieses Problems, die tiefere analytische Hilfsmittel benutzen, zeichnet sich die Beweismethode des Verf. durch große Einfachheit aus, indem er nur die gewöhnliche Fouriersche Integralformel und die Resudentheorie benutzt. Es wird die Funktion $U_{a,b}(\zeta, y)$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b u(x, y) e^{i\zeta x} dx$ gebildet, die der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 U_{a,b}}{\partial y^2} = \zeta^2 U_{a,b} + X_{a,b}(\zeta, y)$ genügt,

wo $\sqrt{2\pi} X_{a,b}(\zeta, y) = [i\zeta u(b, y) - u_x(b, y)] e^{i\zeta b} - [i\zeta u(a, y) - u_x(a, y)] e^{i\zeta a}$

ist, und $U_{a,b}$ die Grenzbedingungen $U_{a,b}(\zeta, 0) = 0$; $\left[\frac{\partial}{\partial y} U_{a,b}(\zeta, y) \right]_{y=1} = k U_{a,b}(\zeta, x)$ befriedigt. Die Lösung wird in der bekannten Integralform dargestellt

$$U_{a,b}(\zeta, y) = \int_0^1 K(\zeta; y, T) X_{a,b}(\zeta, T) dT,$$

wobei $K(\zeta; y, T) = \{k \sinh \zeta(1-y) - \zeta \cosh(1-y)\} \sinh \zeta T / (\zeta \cosh \zeta - k \sinh \zeta)$ ist. Für $a < x < b$ gilt auf Grund der Fourierschen Umkehrformel

$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} U_{a,b}(\zeta, y) e^{-i\zeta x} d\zeta$$

mit $U_{a,b} = U_a - U_b$ und $U_b(\zeta, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \{i\zeta u(b, T) - u_x(b, T)\} e^{i\zeta b} K(\zeta; y, T) dT$,

so daß für u die Zerlegung $u(x, y) = u_a(x, y) + u_b(x, y)$ gilt mit

$$u_b(x, y) = \sum_n C_n e^{\alpha_n x} \sin \alpha_n y \int_0^1 e^{-b\alpha_n} \{\alpha_n u(b, T) - u_x(b, T)\} \sin \alpha_n T dT \quad (*)$$

und $C_n = \frac{1/\alpha_n}{1 - \alpha_n/(\alpha_n^2 + k^2)}$, wobei α_n sämtliche Nullstellen von $\cos \alpha - k \sin \alpha$ durchläuft, für die $R(\alpha) \geq 0$ ist. ($U_a(x, y)$ ist eine ähnliche Summe für die Nullstellen, für die $R(\alpha) \leq 0$ ist.) Verf. zeigt nun, daß die Summe in (*) von b unabhängig ist,

so daß $u(x, y) = \sum C_n e^{\alpha_n x} \sin \alpha_n y \int_0^1 e^{-b\alpha_n} \{\alpha_n u(b, T) - u_x(b, T)\} \sin \alpha_n T dT$ gilt.

Für $b = x$ erhält man die Lösung in der Summenform

$$\mu(x, y) = \sum C_n \sin \alpha_n y \int_0^1 u(x, T) \sin \alpha_n T dT.$$

Diskussion der Lösung.

Wegner (Heidelberg).

Brelot, M.: Problème de Dirichlet et majorantes harmoniques. Bull. Sci. math., II. s. 63, 79—96 u. 115—128 (1939).

Darstellung der wichtigsten Begriffe und Ergebnisse des Dirichlet-Wienerschen Problems, ferner Bemerkungen über die Zusammenhänge der verschiedenen Herstellungsarten der Wienerschen Lösung, wobei der Begriff der besten harmonischen Majorante einen wichtigen Platz einnimmt. Analoge Bemerkungen folgen dann über die Keldych-Lavrentieffsche Methode zur Lösung des Dirichletschen Problems durch äußere Approximation der gegebenen Punktmenge, die vom Verf. als abgeschlossen, sonst aber beliebig vorausgesetzt wird. Insbesondere werden die Zusammenhänge zwischen den irregulären Punkten des Wienerschen Problems und den entsprechenden „instabilen“ Punkten des äußeren Problems diskutiert. *Rolf Nevanlinna* (Helsinki).

Brelot, Marcel: Familles de Perron et problème de Dirichlet. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1623—1625 (1939).

Vorankündigung einer unter demselben Titel erscheinenden Arbeit zum Dirichlet-schen Problem. *Hornich* (Wien).

Frostman, Otto: Sur les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire. Ark. Mat. Astron. Fys. 26 A, Nr 16, 1—16 (1939).

L'auteur poursuit les travaux de M. Riesz (ce Zbl. 18, 407) concernant la définition et la représentation potentielle des fonctions sousharmoniques d'ordre α , et traite

la question plus simplement par une méthode qu'il a déjà employée dans le cas ordinaire $\alpha = 2$ (ce Zbl. 16, 106). Après le cas des fonctions s. h. dans tout l'espace, il considère les fonctions s. h. d'ordre α relativement à un domaine (de l'espace à m dim.) en remplaçant par la fonction de Green, la fonction de distance $r^{\alpha-m}$. *Brelot* (Bordeaux).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Amoroso, L.: *Intorno alla equazione integrale di prima specie.* Boll. Un. Mat. ital., II. s. 1, 193—197 (1939).

Nach Lauricella und Picard ist für die Lösbarkeit der Integralgleichung 1. Art $g(s) = \int_a^b K(s, t) f(t) dt$ bei vollständigem Kern $K(s, t)$ mit den Eigenwerten λ_ν und den orthogonalen Eigenfunktionen $\varphi_\nu(s)$ und $\psi_\nu(t)$ durch eine samt ihrem Quadrate im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(t)$ notwendig und hinreichend, daß die mit den Fourierkoeffizienten $c_\nu = \int_a^b g(s) \varphi_\nu(s) ds$ gebildete Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_\nu c_\nu)^2$ konvergiert. Verf. zeigt: Bei nicht vollständigem Kern bleibt diese Bedingung als notwendig und hinreichend bestehen, wenn sie um die Zusatzforderung $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 = \int_a^b g^2(s) ds$ erweitert wird. Allgemeiner kann ausgesagt werden, daß $\int_a^b g^2(s) ds - \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2$ den kleinsten, bei Erfülltsein der Picardschen Bedingung auch sicher erreichten Wert darstellt, den das Integral $\int_a^b \left[g(s) - \int_a^b K(s, t) f(t) dt \right]^2 ds$ für irgendein $f(t)$ der oben bezeichneten Art annehmen kann. *Schoblik* (Brünn).

Nalli, P.: *Risoluzione di due problemi classici per mezzo di una equazione di Volterra.* Ann. Math. pura appl., IV. s. 17, 193—202 (1938).

Le but de ce Mémoire est la démonstration de l'équivalence des deux problèmes suivants: construction d'une courbe dont on connaît les courbures de flexion et torsion en fonction de l'arc s , intégration des équations d'un mouvement rigide. Les deux problèmes se traduisent analytiquement par une même équation intégrale de Volterra.

G. Lampariello (Roma).

Kondrachov V.: *Sur certaines évaluations pour les familles de fonctions vérifiant quelques inégalités intégrales.* C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 18, 235—240 (1938).

L'Autore considera in un dominio D di uno spazio numerico ad n dimensioni, l'insieme delle funzioni φ di n variabili continue insieme con le loro derivate parziali di ordine k , soddisfacenti alla condizione

$$\int \dots \int \sum_{l=0}^k \sum_{\alpha=l}^n \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^p dx_1 \dots dx_n \leq A$$

dove A è una costante. Si consideri la molteplicità F comune a D e al piano $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$) e sia $x_i = \chi_i(x_{s+1}, \dots, x_n)$, $|\chi_i| \leq \delta$ ($i = 1, \dots, s$) una molteplicità vicina ad F . Si ponga

$$J_{n-s}(\varphi) = \frac{1}{|F|} \int \dots \int_F \varphi(0, 0, \dots, x_{s+1}, \dots, x_n) |dx_{s+1} \dots dx_n|$$

$$\Delta(\varphi) = \frac{1}{|F|} \int \dots \int_F |\varphi(\chi_1, \chi_2, \dots, x_{s+1}, \dots, x_n) - \varphi(0, 0, \dots, x_{s+1}, \dots, x_n)|^p dx_{s+1} \dots dx_n$$

Si può allora dimostrare che $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta(\varphi) = 0$, sotto l'ipotesi che sia $I_{n-s}(\varphi) \leq A B_1$, se $p > 1$ e $k > \frac{s}{p}$. Anzi, posto $k = \frac{s+m}{p}$, $m > 0$, si ha $\Delta(\varphi) \leq A B_2 \delta^m$, $m < p$; $\Delta(\varphi) \leq A B_3 \delta^p |\log \delta|^{p-1}$, $m = p$; $\Delta(\varphi) \leq A B_4 \delta^p$, dove le B sono costanti introdotte per poter applicare il teorema alle molteplicità che divengono piane, quando si fa una trasformazione conveniente, continua insieme con un numero sufficiente di derivate.

G. Lampariello (Roma).

Halperin, I., and H. R. Pitt: Integral inequalities connected with differential operators. Duke math. J. 4, 613—625 (1938).

Scopo della Nota è l'applicazione a particolari operatori differenziali di disuguaglianze integrali ottenute nel modo seguente. Siano $f(x)$, $f_r(x)$, $q_r(x)$, $q_{r,j}(x)$, $p_r(x)$, $c(x)$ funzioni misurabili in un intervallo finito o infinito $\alpha, \alpha + a$; le $f_r(x)$ ($r=0, 1, \dots, n-1$) siano assolutamente continue in ogni intervallo parziale chiuso e quasi dappertutto in $\alpha, \alpha + a$ sussistano le relazioni

$$\text{Se si pone} \quad f_0(x) = q_0(x) f(x), \quad f_{r+1}(x) = f'_r(x) + q_{r+1} + \sum_{j=0}^r q_{r,j}(x) f_j(x). \\ T f(x) = \sum_{r=0}^n p_r(x) f_r(x) + c(x) f(x)$$

$$A_r = \left[\int_{\alpha}^{\alpha+a} |f_r(x)|^p dx \right]^{1/p}, \quad B = \left[\int_{\alpha}^{\alpha+a} |T f(x)|^p dx \right]^{1/p}, \quad p \geq 1$$

sussistono, sotto convenienti specificazioni per le funzioni $q_{r,j}(x)$, $q_r(x)$, $c(x)$, disuguaglianze del tipo $A_r \leq \mathfrak{F}(A_0, A_n)$, $A_r \leq \mathfrak{F}(A_0, B)$. G. Lampariello (Roma).

Kober, H.: Beziehungen zwischen Systemen selbstreziproker Funktionen. Proc. London Math. Soc., II. s. 45, 229—242 (1939).

Verf. betrachtet lineare involutorische Transformationen $T[\psi]$, $T^2[\psi] = 1$, im Raume $L_2(0, \infty)$ von der Art $\left(\frac{\psi(x)}{x} \subset L_2 \right)$

$$\int_0^x g(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} \psi(t) f(t) dt, \quad (1a) \quad \int_0^x g(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} \psi\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt \quad (1b)$$

und die zugehörigen (Hilbertschen) Räume R und R' der selbstreziproken und schiefreziproken Funktionen und stellt insbesondere die Frage nach der Charakterisierung der linearen Transf. W , die die Räume R oder R' , die zu gleichen oder verschiedenen Transf. der oben angegebenen Art gehören, aufeinander abbilden. Die Frage wird durch eine Reihe von Sätzen beantwortet, durch welche verschiedene Zusammenhänge klargestellt werden. Einiges sei inhaltlich kurz wiedergegeben: 1. Seien T_1 und T_2 Transf. der „Watsonklasse“ (stetig und involutorisch der Art (1a)), sei W stetig und von der Art (1a) oder (1b), dann und nur dann bildet W den Raum R_1 auf R_2 ab, wenn $T_2 W = W T_1$ ist. In diesem Falle bildet W auch R'_1 auf R'_2 ab, und wenn W der Art (1a) ist, wird auch R_2 auf R_1 sowie R'_2 auf R'_1 abgebildet. Wenn aber $W[\psi_0]$ der Art (1b) ist, so wird die Abbildung R_2 auf R_1 sowie R'_2 auf R'_1 durch $W[\psi_{00}]$ geliefert, wo

$$\int_0^x \psi_{00}\left(\frac{1}{u}\right) du = x \int_0^{\frac{x}{u}} \psi_0\left(\frac{1}{u}\right) du \quad (x > 0)$$

ist. 2. Sei $W[\psi]$ eine lineare abgeschlossene oder stetige Transf., und

$$\Omega(t) = \left(\frac{1}{2} - it\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^n \psi(x) x^{-\frac{1}{2} + it} dx \quad (-\infty < t < \infty)$$

(Mellinsche Transf.), und T eine involutorische Transf. der Art (1a). Die Transf. W liefert dann und nur dann eine Abbildung von R auf einen — echten oder unechten — Teil von R bzw. R' , wenn sie von der Art (1b) ist und $\Omega(t)$ in $(-\infty, \infty)$ bis auf eine

Menge vom Maße Null beschränkt und gerade bzw. ungerade ist. Die Abbildung ist dann und nur dann vollständig, wenn $|\Omega(t)| \geq c > 0$ in $(-\infty, \infty)$ ist. — Als Anwendung der Theoreme werden verschiedene spezielle Transformationen der betrachteten Art aufgestellt. Z. B. werden Abbildungen der Räume der selbst- bzw. schiefreziproken Funktionen in bezug auf Hankelsche- spez. auch Fourier-sin- und Fourier-cos-Transf. gewonnen. Die Abhandlung hängt stark mit früheren Arbeiten des Verf. zusammen. Vgl. dies Zbl. 17, 169; 18, 362; 19, 265, sowie Quart. J. Math., 33, 41—52 (1938).
H. Hadwiger (Bern).

Mohan, Brij: A theorem on self-reciprocal functions. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 21, 91—95 (1939).

When $f(z)$ is an analytic function of the complex variable $z = re^{i\theta}$ regular in the angle A defined by $r > 0$, $|\theta| < \omega$ and when also $f(z) = O(|z|^{-a-\delta})$ for small values of $|z|$ while $f(z) = O(|z|^{a-1+\delta})$ for large values of $|z|$ uniformly for every $\delta > 0$ and $|\theta| \leq \omega - \eta < \omega$ the function is said to belong to $A(\omega, a)$ (Hardy and Titchmarsh). Mohan shows that when a function $f(z)$ of this type is also its own J_1 transform the function $g(x)$ defined by the integral

$$g(x) = x^{-1/\nu} \int_0^\infty y^{-1/\nu} H_{1/\nu-1}(xy) f(y) dy,$$

with a Struve function as kernel, belongs to $A(\omega, a)$ and is its own J_ν transform. — M. gives a second theorem by which a function of this type may be derived from one of a similar type but with μ in place of ν .
H. Bateman (Pasadena).

Sastry, R. V.: A self-reciprocal function. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 21, 95—100 (1939).

It is shown that the function $f(x) = x^\frac{1}{2} I_\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2)$ satisfies the integral equation

$$f(x) = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \sin(xy) f(y) dy \quad (C, 1)$$

where the integral is uniformly summable in the Cesàro sense in $0 < \alpha \leq x < \beta$. This property of uniform summability is possessed also by the integral derived from the above by differentiation with respect to x . — In the proof use is made of Brij Mohan's lemma. A theorem is finally given for the representation by a type of Cesàro mean integral of a function $f(x)$ such that $\int_0^1 |f(x)| dx$ and $\int_1^\infty x^{-1} |f(x)| dx$ are finite and

$$\int_0^\infty x^{\sigma-1} f(x) dx \quad 0 < \alpha \leq \sigma \leq \beta < \frac{1}{2}$$

exists as a Cauchy integral at both limits and is summable (C, 1) for $|2\sigma - 1| \leq 2\alpha \leq 1$; the meaning of σ is not specified; it is, perhaps $R(s)$.
H. Bateman (Pasadena).

Hostinský, B.: Sur une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités. III. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr 261, 1—26 (1938).

Die Chapmansche Gleichung

$$\Phi(x_0, x, t_0, t) = \int_a^b \Phi(x_0, z, t_0, u) \Phi(z, x, u, t) dz, \quad a \leq x_0, x \leq b, t_0 < u < t \quad (1)$$

kann man in einer Form lösen, die von einer willkürlichen, beschränkten, integrierbaren Funktion $A(x_0, x, u)$ abhängt. Ist nämlich $j(x_0, x, t_0, t)$ eine spezielle Lösung von (1), und setzt man

$$A_n(x_0, x, t_0, t) = \int_{D_n} j(x_0, z_1, t_0, u_1) \cdot \prod_{i=1}^n A(z_{2i-1}, z_{2i}, u_i) j(z_{2i}, z_{2i+1}, u_i, u_{i+1}) dt_n,$$

$$z_{2n+1} = x, \quad u_{n+1} = t,$$

worin $dt_n = dz_1 \dots dz_{2n} du_1 \dots du_n$ das Volumelement des durch die Ungleichungen

$a \leq z_i \leq b$, $t_0 < u_1 < u_2 \dots < u_n < t$ beschriebenen Gebietes D_n ist, so ist

$$\Phi(x_0, x, t_0, t) = j(x_0, x, t_0, t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x_0, x, t_0, t) \quad (2)$$

eine Lösung von (1) mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, x, t_0, t_0) &= j(x_0, x, t_0, t_0), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_0, x, t_0, t) \Big|_{t=t_0} &= \frac{\partial j}{\partial t}(x_0, x, t_0, t) \Big|_{t=t_0} \\ &+ \int_a^b \int_a^b j(x_0, z_1, t_0, t_0) A(z_1, z_2, t_0) j(z_2, x, t_0, t_0) dz_1 dz_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Ist Φ der zusätzlichen Bedingung $\int_a^b \Phi(x_0, x, t_0, t) dx = 1$ unterworfen, und ist dasselbe bei $j(x_0, x, t_0, t)$ der Fall, so erhält man wieder eine Lösung Φ_1 in der Form (2), wenn man die Definition der A_n abändert in

$$A_n(x_0, x, t_0, t) = \int_{D_n} j(x_0, z_1, t_0, u_1) \cdot \prod_{i=1}^n A(z_{2i-1}, z_{2i}, u_i) \{j(z_{2i}, z_{2i+1}, u_i, u_{i+1}) - j(z_{2i-1}, z_{2i+1}, u_i, u_{i+1})\} dt_n$$

und eine entsprechende Abänderung in (3) vornimmt. — Verf. untersucht insbesondere diejenigen Lösungen von (1), die hervorgehen, wenn man für j die Greensche Funktion des linearen Wärmeleitungsproblems

$$j(x_0, x, t_0, t) = (2\sqrt{\pi D(t-t_0)})^{-1} \cdot \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \exp[-(x-x_0+v(b-a))^2/4D(t-t_0)]$$

($D = \text{konst.}$)

einsetzt. Es ergibt sich dann, daß (2) die Bedingungen erfüllt $\Phi(x_0, x, t_0, t) > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \Phi(x_0, x, t_0, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_0, x, t_0, t) = A(x_0, x, t_0) \quad \text{für } x \neq x_0,$$

und Entsprechendes gilt für die Lösung Φ_1 . Φ und Φ_1 genügen überdies in jedem Falle einer leicht angebbaren Integrodifferentialgleichung. Die Ergebnisse lassen sich auf allgemeinere Greensche Funktionen ausdehnen und insbesondere gestatten die einzelnen Summanden in (2) eine anschauliche physikalische Deutung. Vgl. auch dies. Zbl. 5, 256; 10, 311.

Harald Geppert (Gießen).

Hostinský, Bohuslav: Sur la solution de l'équation généralisée de Chapman. Čas. mat. fys. 68, 8—14 u. franz. Zusammenfassung 14 (1939) [Tschechisch].

Mit Hilfe der vom Verf. anderweitig (Volterra-Hostinský, Opérations infinitésimales linéaires. Paris 1938) bewiesenen Tatsache, daß die Funktion $\psi(x, y, s, t)$

$$= \int_a^t K(x, y, u) du + \sum_{n=2}^{\infty} \int_a^b \dots \int_a^b \int_a^t \dots \int_a^t K(x, z_1, u_1) K(z_1, z_2, u_2) \dots K(z_{n-1}, y, u_n) du_1 \dots du_n dz_1 \dots dz_{n-1},$$

wo K eine beliebige stetige Funktion ihrer Argumente bedeutet, einerseits der Gleichung

$$\psi(x, y, s, t) = \psi(x, y, s, u) + \psi(x, y, u, t) + \int_a^b \psi(x, z, s, u) \psi(z, y, u, t) dz$$

genügt und andererseits zu den beiden gegenseitig inversen Funktionaltransformationen

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b \psi(x, y, s, t) f(y) dy \quad \text{und} \quad f(x) = \varphi(x) + \int_a^b \psi(x, y, t, s) \varphi(y) dy$$

Veranlassung gibt, wird bewiesen, daß das mittels einer von Pospíšil angegebenen Lösung $\Phi(x, Y, s, t)$ der Chapmanschen Funktionalgleichung $\Phi(x, Y, s, t) = \int_R \Phi(x, dZ, s, u) \Phi(z, Y, u, t) - x, s$ und t sind Variable, Y ein Intervall, Φ ist daher

ein Funktional; R bedeutet ein Teilintervall von Y — gebildete Funktional $\int_R \Phi(x, dY, s, t) f(y)$ Lösung der Integralgleichung $\int_R \Phi(x, dY, t, s) \varphi(y) = f(x)$ ist.

Schoblik (Brünn).

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Maeda, Fumitomo: On the completeness of the orthogonal systems. Rend. Circ. mat. Palermo **61**, 375—387 (1939).

Es werden die Vollständigkeitsbedingungen für orthogonale Systeme einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **13**, 357) unter Benutzung von Kolmogoroff's Integral verallgemeinert. Es wird die Orthogonalität eines (nicht nur abzählbaren) Systems von Mengenfunktionen definiert und eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Vollständigkeit des Systems in $L_2(\beta)$ (vgl. dies. Zbl. **13**, 357) angegeben. *S. Kaczmarz* (Lwów).

Catunda, Omar: Un teorema sugli insiemi, che si riconnette alla teoria dei funzionali analitici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **29**, 15—20 (1939).

Eine Umgebung einer in einem Gebiet R der Segreschen Mannigfaltigkeit S regulären analytischen Funktion $y_0(t_1, \dots, t_n)$ besteht aus allen $y(t_1, \dots, t_n)$, die in einer abgeschlossenen Menge $T \subset R$ regulär sind. Eine Menge \mathfrak{R} von regulären Funktionen $y(t_1, \dots, t_n)$ heißt ein lineares funktionales Gebiet, wenn 1. mit y eine ganze Umgebung in \mathfrak{R} liegt, 2. mit y_1 und y_2 auch $y_1 + y_2$ in \mathfrak{R} liegt, 3. mit jeder analytischen Kurve $y(t_1, \dots, t_n; \alpha)$ auch $\int_{\lambda} y(t_1, \dots, t_n; \alpha) g(\alpha) d\alpha$ in \mathfrak{R} liegt [λ ein Bogen der komplexen Ebene, so daß alle $y(\alpha)$ mit α auf λ in \mathfrak{R} liegen, $g(\alpha)$ regulär auf λ]. L. Fantappiè bewies (noch nicht veröffentlicht), daß jedes lineare funktionale Gebiet \mathfrak{R} genau aus allen auf einer festen, nicht leeren, abgeschlossenen Teilmenge von S regulären Funktionen besteht. Dieser Satz wird hier ohne das Zermelosche Auswahlpostulat bewiesen. *G. Köthe* (Münster i. W.).

Titchmarsh, E. C.: Solutions of some functional equations. J. London Math. Soc. **14**, 118—124 (1939).

In §§ 9.9, 10.16—10.18, 11.2, 11.3 of his book Introduction to the theory of Fourier Integrals (cf. this Zbl. **17**, 404—405) the author used Fourier integrals and contour integration to obtain the solutions of certain functional equations, the unknown function $f(x)$ being of the form $O(e^{c|x|})$ at infinity for some constant c . He shows now that similar methods can be used even when this condition is not satisfied. He illustrates his method on the particular equation $f'(x) = (f(x+h) - f(x-h))/2h$.

He considers then integral equations of the type $f(x) = \int_0^1 k(t)f(x-t)dt$ where the given function $k(t)$ is $L^2(0, 1)$ and the unknown function $f(x)$ is supposed belonging to L^2 over any finite interval (but without any restriction as to the order of $f(x)$ at infinity) and determines all the solutions. In the problem with infinite range of integration

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t)f(x-t)dt \quad (*)$$

one has to assume something about the order of $f(x)$ at infinity. The author gives all the solutions $f(x)$ of (*) in the special case $k(\cdot) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$, such that $f(x) = O(e^{cx^2})$ ($0 < c < \frac{1}{2}$).

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Kantorovitch, L.: The method of successive approximations for functional equations. Acta math. **71**, 63—97 (1939).

Der Beweis des Satzes, daß die Gleichung $x = f(x)$ mit im Intervall $0 \leq x \leq x'$ stetig und monoton wachsendem $f(x)$ unter der Voraussetzung $f(0) \geq 0$ und $f(x') \leq x'$ stets eine in diesem Intervall gelegene, durch sukzessive Approximation herstellbare Lösung besitzt, stützt sich bloß auf die folgenden beiden Tatsachen: 1. die Ungleichung $x_1 > x_2$ ist für jedes Wertepaar x_1, x_2 definiert, 2. jede beschränkte Menge von Zahlen besitzt eine kleinste obere und eine größte untere Schranke. Er läßt sich daher in seinem wesentlichen Inhalt auf beliebige lineare Räume Z , für deren Elemente z diese beiden Aussagen zutreffen (Räume vom Typus K_5), und auf solche Gleichungen $z = V(z)$ in diesen Räumen übertragen, in denen $V(z)$ einen im Intervall $0 \leq z \leq z'$ wenigstens

linksseitig stetigen, positiven und monoton wachsenden Operator bedeutet, für den überdies $V(z') \leq z'$ gilt. Damit besteht dann weiter die Möglichkeit, einen entsprechenden Existenzsatz auch für solche Räume auszusprechen, die mit Hilfe eines Raumes vom Typus K_5 normiert werden können, d. h. in denen jedem Element y ein mit $|y|$ bezeichnetes Element eines Raumes vom Typus K_5 mit den Eigenschaften a) $|y| = 0$ nur für $y = 0$, b) $|y_1 + y_2| \leq |y_1| + |y_2|$, c) $|\lambda y| = |\lambda| |y|$ zugeordnet werden kann. Dieser allgemeine Existenzsatz, der in der vorliegenden Arbeit bewiesen und noch in zahlreichen Sonderfällen näher beleuchtet wird, enthält viele bekannte Existenzsätze in sich. Der Verf. behandelt in dieser Hinsicht lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten, ein unendliches System nichtlinearer algebraischer Gleichungen, ein endliches nichtlineares Gleichungssystem allgemeinen Charakters, den Satz über implizite Funktionen, einen Konvergenzfall der Newtonschen Näherungsmethode, Existenzsätze über lineare Integralgleichungen vom Volterraschen und Fredholmischen Typus sowie über nichtlineare Integralgleichungen und schließlich aus der Theorie der Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung die Picardsche Methode der sukzessiven Approximation und die Cauchysche Majorantenmethode. *Schoblik.*

Popoviciu, Tiberiu: Sur les solutions bornées et les solutions mesurables de certaines equations fonctionnelles. *Mathematica, Cluj* 14, 47—106 (1938).

In questo lavoro l'A. si propone di caratterizzare le funzioni $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ che verificano un'equazione del tipo

$$\sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} a_{i_1 i_2 \dots i_m} f(x_1 + \alpha_{1 i_1} h_1, \dots, x_m + \alpha_{m i_m} h_m) = 0 \quad (1)$$

per tutti i valori delle x e h tali che i punti $(x_1 + \alpha_{1 i_1} h_1, \dots, x_m + \alpha_{m i_m} h_m)$ appartengano ad un assegnato dominio rettangolare k . Nella (1) le a e α sono costanti assegnate. Il risultato principale del lavoro è il seguente: Nel campo delle funzioni $f(x_1, \dots, x_m)$, misurabili separatamente rispetto a ciascuno delle variabili x_1, \dots, x_m , la soluzione generale della (1) è una somma di funzioni del tipo $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_r^{l_r} A(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_m})$ dove gli l sono opportuni numeri interi non negativi e A è una funzione arbitraria di $m - r$ variabili ($r > 1$). — Questo risultato può essere ulteriormente precisato introducendo la nozione di ordine dell'operatore Δ del primo membro della (1). Così, per esempio, nel caso di una variabile si chiama ordine di Δ il minimo valore intero non negativo dell'indice k per il quale riesce $\sum a_i \alpha_i^k \neq 0$ e si ha che se Δ è di ordine k la soluzione generale della (1) è un arbitrario polinomio di grado $k - 1$ e ciò anche se la f si suppone limitata anzi che misurabile. — Nel caso di più variabili si giunge egualmente ad una precisazione del risultato più sopra enunciato, ma in modo assai meno semplice che nel caso di una variabile; inoltre l'ipotesi che la f sia limitata non può essere sostituita all'altra che la f sia linearmente misurabile, se non quando l'operatore Δ è di tipo particolare. *C. Miranda (Genova).*

Calkin, J. W.: General self-adjoint boundary conditions for certain partial differential operators. *Proc. nat. Acad. Sci., Wash.* 25, 201—206 (1939).

Ankündigung mehrerer Resultate über lineare partielle Differentialoperatoren des Typus

$$L \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right) + q(x, y)$$

als Anwendung einer vom Verf. früher skizzierten abstrakten Randwerttheorie im Hilbertschen Raum (dies. Zbl. 19, 31). Bezeichnet man mit T die Transformation, die jeder Funktion $f(x, y)$, welche passende für die Existenz und Quadratsummierbarkeit von $L(f)$ notwendige Bedingungen erfüllt, die Funktion $L(f)$ zuordnet, so findet man, daß T als eine Lineartransformation im Hilbertschen Raum aufgefaßt werden kann. Nach allgemeinen Aussagen (im Ideenkreis der hauptsächlich von F. Riesz, J. v. Neumann, M. H. Stone entwickelten Theorien) über solche Lineartransformationen stellt Verf. bei sehr weiten Voraussetzungen die Gültigkeit der Reziprozitätsformel fest, die als ein Sonderfall einer abstrakten Formel der oben zitierten

Arbeit des Verf. auftritt. Es wird dann die Transformation D betrachtet, die den Funktionenpaaren $\{f(x, y), f(s)\}$ [unter $f(s)$ die Randwerte von $f(x, y)$ verstanden] die $\left\{L(f), -p \frac{\partial f}{\partial u}\right\}$ zuordnet; sie kann als eine positiv-halbdefinite selbstadjungierte Lineartransformation im Funktionalraum aller Paare $\{f(x, y), h(s)\}$ aufgefaßt werden, wo $f(x, y), h(s)$ quadratsummierbare Funktionen im Ebenengebiet E bzw. auf dessen Berandung C bedeuten. Die Resolvente von D ist totalstetig. — Nach dem Erscheinen einer vom Verf. versprochenen ausführlichen Arbeit wird ein vollständiger Bericht möglich sein.

G. Cimmino (Cagliari).

Hille, Einar: *Analytical semi-groups in the theory of linear transformations.* (Hel-singfors, 23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 135—145 (1939).

Ist Z eine Punktmenge in der komplexen α -Ebene, so versteht Verf. unter einer Halbgruppe eine einparametrische Familie von beschränkten Transformationen T_α mit α aus Z eines abstrakten metrischen Raumes E auf sich selbst, wenn für alle α aus E und $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ aus Z die Gleichung $T_\alpha(T_\beta x) = T_{\alpha+\beta} x$ gilt. Wichtig ist der Fall, in welchem mit α und β schon $\alpha + \beta$ in Z liegt und 0 in Z ein nichtisolierter Punkt ist. Verf. gibt Bedingungen für die Regularität von T_α an und untersucht die Fortsetzbarkeit von der reellen Achse in eine Halbebene hinein. Dabei spielt die Resolvente $R(\lambda, \alpha) = (\lambda \cdot 1 - T_\alpha)^{-1}$ für kleine α eine entscheidende Rolle hinsichtlich der Größenordnung und der λ , für welche sie existiert. Endlich wird noch die Fortsetzbarkeit in die ganze α -Ebene behandelt. Die T_α bilden dann eine Gruppe.

Landherr (Rostock).

Calkin, J. W.: *Abstract symmetric boundary conditions.* Trans. Amer. Math. Soc. 45, 369—442 (1939).

Die Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen lassen sich in folgender Weise für beliebige lineare abgeschlossene symmetrische Operatoren H des Hilbertschen Raumes \mathfrak{H} abstrakt formulieren: Ein linearer abg. Operator A , der im Graph $\mathfrak{B}(H^*)$ (dies ist der Teilraum von $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$, der aus allen Paaren $\{f, H^*f\}$ besteht) erklärt ist und Werte in einem unitären oder Hilbertschen Raum \mathfrak{M} dicht annimmt, heißt ein Reduktionsoperator für H^* , wenn es einen unitären Operator W in \mathfrak{M} mit $W^2 = -I$ gibt, so daß die Menge aller Vektoren $\{H^*f, -f, W A \{f, H^*f\}\}$ der Orthogonalraum zu $\mathfrak{B}(A)$ in $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M}$ ist. Es gilt dann die abstrakte Lagrangeidentität $\langle f, H^*g \rangle - \langle H^*f, g \rangle + \langle A f, W A g \rangle = 0$ für alle f, g aus $\mathfrak{B}(H^*)$, für die $A f$ und $A g$ erklärt sind; dabei ist zur Abkürzung $A \{f, H^*f\} = A f$ gesetzt. Ist nun \mathfrak{N} ein linearer Teilraum von \mathfrak{M} , so wird durch die „Randbedingung“ $A f \in \mathfrak{N}$ ein Teilbereich $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ des Definitionsbereiches $\mathfrak{D}(H^*)$ von H^* bestimmt. Der aus H^* durch Einschränkung des Definitionsbereiches auf $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ entstehende Operator $H(\mathfrak{N})$ ist eine Erweiterung von H . Das Problem der Arbeit ist nun: Für welche Randbedingungen \mathfrak{N} wird $H(\mathfrak{N})$ symmetrisch, speziell maximal symmetrisch oder selbstadjungiert? Zur Beantwortung dieses Problems werden die W -symmetrischen $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ untersucht. \mathfrak{N} heißt W -symmetrisch, wenn $W\mathfrak{N}$ im Komplementärraum $\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{N}$ von \mathfrak{N} liegt. Ist \mathfrak{N} W -symmetrisch, so ist $H(\mathfrak{N})$ linear und symmetrisch. Umgekehrt gilt für eine lineare symmetrische Erweiterung S von H mit $\mathfrak{B}(S) \subseteq \mathfrak{D}(A)$, daß $A\mathfrak{B}(S)$ W -symmetrisch in \mathfrak{M} ist. \mathfrak{N} heißt maximal (hypermaximal) W -symmetrisch, wenn \mathfrak{N} keine W -symmetrische Erweiterung besitzt, bzw. wenn $W\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{N}$ ist. Ist \mathfrak{M} speziell ein unitärer Raum oder ist A beschränkt, so ist $H(\mathfrak{N})$ dann und nur dann maximal symmetrisch bzw. selbstadjungiert, wenn \mathfrak{N} maximal bzw. hypermaximal W -symmetrisch ist. Ist A unbeschränkt, so gelten kompliziertere Verhältnisse. Die genauere Analyse beider Fälle geschieht mit Hilfe einer eindeutigen Abbildung der W -symmetrischen $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ auf die isometrischen Abbildungen V mit $\mathfrak{D}(V) \subseteq \mathfrak{M}^+$, $\mathfrak{R}(V) \subseteq \mathfrak{M}^-$. Dabei bedeutet $\mathfrak{R}(V)$ den Bildbereich des Operators V , \mathfrak{M}^+ bzw. \mathfrak{M}^- die zu $+i$ bzw. $-i$ gehörigen Eigenräume von W in \mathfrak{M} ($\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^+ \oplus \mathfrak{M}^-$). \mathfrak{N} und V entsprechen sich durch $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}(I - V)$. $\mathfrak{R}(I - V)$ ist maximal W -symmetrisch dann und nur dann, wenn $\mathfrak{D}(V) = \mathfrak{M}^+$ oder $\mathfrak{R}(V) = \mathfrak{M}^-$ ist.

hypermaximal dann und nur dann, wenn beides zugleich gilt. Die für beschränktes A erhaltenen genaueren Ergebnisse enthalten die bekannten Sätze über die symmetrischen Fortsetzungen eines symmetrischen Operators H . Man hat nur als \mathfrak{M} den Raum $\mathfrak{B}(H^*) \ominus \mathfrak{B}(H)$ zu nehmen und als A den Projektor von $\mathfrak{B}(H^*)$ in \mathfrak{M} . Darüber hinaus werden zu H sämtliche möglichen Reduktionsoperatoren A aufgestellt und genau untersucht. Unbeschränkte A sind nur möglich, wenn H den Defekt (\aleph_0, \aleph_0) hat. — Die Anwendung dieser Ergebnisse, von denen wir nur einen kleinen Teil bringen konnten, auf die Randwertprobleme der Differentialgleichungen soll in einer Fortsetzung folgen.

G. Köthe (Münster i. W.).

Pinsker, A. G.: Sur certaines propriétés des K -espaces étendus. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 22, 216—219 (1939).

Verf. beweist u. a. die folgenden Sätze: 1. Jeder ausgedehnte K -Raum besitzt eine Einheit. 2. Der Ausdehnungsraum eines regulären K -Raumes \mathfrak{K} ist regulär dann und nur dann, wenn \mathfrak{K} eine Einheit besitzt. Was die Terminologie betrifft, muß auf die folgenden Arbeiten verwiesen werden: Pinsker (dies. Zbl. 19, 170 u. 20, 134), Kantorovitch (dies. Zbl. 13, 268) und Freudenthal (dies. Zbl. 14, 313).

Gołqb (Krakau).

Murray, Francis J.: Bilinear transformations in Hilbert space. Trans. Amer. Math. Soc. 45, 474—507 (1939).

Eine bilineare Transformation im Hilbertschen Raum \mathfrak{H} ist eine für gewisse $f, g \in \mathfrak{H}$ erklärte Funktion $F(f, g)$ mit Werten aus \mathfrak{H} , die als Funktion von f oder g allein ein linearer Operator R_g bzw. T_f ist. F kann stets als Transformation im Produktraum $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$ aufgefaßt werden: $F(f, g) = T(f \otimes g)$. T läßt sich dann und nur dann zu einem linearen Operator fortsetzen, wenn mit $F(f_1, g_1)$ und $F(f_2, g_2)$ stets auch $F(f_1, g_2)$ und $F(f_2, g_1)$ sinnvoll ist ($f_1, f_2, g_1, g_2 \neq 0$); man erhält so alle lin. Operatoren T in $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$ mit Werten aus \mathfrak{H} . — Speziell werden assoziative Transformationen untersucht, für die $F(f_1, f_2) \in \mathfrak{A}$ für $f_1, f_2 \in \mathfrak{A}$ und T_f beschränkt für $f \in \mathfrak{A}$ ist. $\mathfrak{A}(\subset \mathfrak{H})$ wird hierdurch ein hyperkomplexes System, und die T_f bilden als Operatoren einen dazu isomorphen algebraischen Ring \mathfrak{M} . Diese Beziehung zu der Murray-v. Neumannschen Theorie der Operatorringe (vgl. dies. Zbl. 14, 161; 17, 360) wird weiterverfolgt. Ein algebr. Operatorring \mathfrak{M} erzeugt umgekehrt eine assoziative bilin. Transf. $F = F_{\mathfrak{M}}$, wenn mit passendem festem $f_0 \in \mathfrak{H}$ aus $T \in \mathfrak{M}$, $T \neq 0$ folgt: $Tf_0 \neq 0$. Ist \mathfrak{M} stark abgeschlossen und $F_{\mathfrak{M}}(f, g)$ überall definiert, so ist \mathfrak{M} endlichdimensional. — Der abelsche Fall $F(f, g) = F(g, f)$ gestattet genauere Aussagen. — Zur Beleuchtung der Definitionen werden einige Beispiele angegeben. Wecken.

Variationsrechnung:

Gugino, Eduardo: Problemi variazionali e loro traiettorie. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 360—365 (1938).

Soit l'équation variationnelle $\delta \int_{t_0}^t L(x|\dot{x}) dt = 0$, où L est une fonction régulière quelconque des variables x et des leurs dérivées par rapport à t (qui n'est pas somme de deux fonctions homogènes l'une de degré zéro, l'autre de degré un). La variable t n'intervient pas dans L , ce qui comporte classiquement l'existence de l'intégrale de l'énergie (pour parler le langage mécanique). L'Auteur propose l'élimination de la variable t dans l'expression de l'intégrale

de l'action de Maupertuis $A = \int_{t_0}^t \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} dx_i$ et démontre que l'équation variationnelle peut

être transformée dans la suivante $\delta \int L'(x|dx|E) = 0$, où l'expression sous le signe intégral, qui contient la constante de l'énergie, est dans tous les cas, homogène de degré un par rapport aux différentielles dx . Inversement, cette équation définit un faisceau de trajectoires pour chaque valeur de E , sur lesquelles on peut définir un mouvement en introduisant un paramètre t à travers une équation arbitraire de la forme $G(x|\dot{x}|E) = 0$ qui contienne la différentielle dt . Dans le cas général, cette opération caractérise des fonctions $x(t)$ qui ne sont pas solutions

d'un système du type de Lagrange, mais si $\frac{\partial^2 L'}{\partial E^2}$ n'est pas identiquement nulle, il y a toujours une loi particulière de parcours sur les trajectoires du faisceau qui permet de déterminer une fonction lagrangienne L , dont les trajectoires s'identifient avec celles considérées.

G. Lampariello (Roma).

Hestenes, M. R., and W. T. Reid: A note on the Weierstrass condition in the calculus of variations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 45, 471—473 (1939).

Bemerkung über die Gültigkeit des Zeichens $=$ in der Ungleichheit $E \geq 0$.

S. Cinquini (Pavia).

Hestenes, M. R.: Generalized problem of Bolza in the calculus of variations. *Duke math. J.* 5, 309—324 (1939).

x_2 L'A. étudie le problème de minimiser une expression de la forme $I(C) = g(a) + \int_{x_1}^{x_2} f(a, x, y, y') dx$ dans une classe de courbes $C: a_h, y_i(x)$ ($x_1 \leq x \leq x_2$; $h = 1, \dots, r$; $i = 1, \dots, n$) satisfaisantes les conditions $\varphi_\gamma(a, x, y, y') = 0$ ($\gamma = 1, \dots, m < n$); $x_s = x_s(a)$, $y_i(x_s) = y_{is}(a)$ ($s = 1, 2$); $I_\rho = g_\rho(a) + \int_{x_1}^{x_2} f_\rho(a, x, y, y') dx = 0$ ($\rho = 1, \dots, p$).

Ici les variables a ne dependent pas de x . — Ce problème, que l'A. nomme problème A généralise le problème de Bolza, pourtant on peut développer la théorie du problème A avec quelques simples modifications des démonstrations de la théorie du problème de Bolza. Seulement pour la condition suffisante il faut donner une démonstration nouvelle que l'A. expose dans ce travail en étendant une méthode qu'il a récemment appliquée dans l'étude du problème de Bolza [*Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 42, 141—153 (1937)].

Basilio Manià (Milano).

Manià, Basilio: Neuere Untersuchungen in der Variationsrechnung. *Abh. math. Semin. Hansische Univ.* 13, 113—143 (1939).

Diese Hamburger Vorträge berichten über neuere Anwendungen der Tonellischen, mit dem Begriff der Halbstetigkeit operierenden direkten Methode der Variationsrechnung: Anwendungen auf die Variationsprobleme a) von Lagrange und von Mayer, b) mit höheren Ableitungen, c) der Doppelintegrale. Jedesmal handelt es sich um drei Schritte: 1. Aufstellung der Bedingungen für die Halbstetigkeit des Extremalintegrals in der Klasse der absolut stetigen Funktionen, 2. Existenz des absoluten Extremums, 3. Herleitung der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen der Extremalen lediglich auf Grund der Voraussetzungen der Existenzsätze. Grundlegend sind die Untersuchungen von Tonelli, insbesondere auch für c). Bei a) hat namentlich der Verf. am Beispiel der Kurve größter Endgeschwindigkeit eines Punktes im widerstehenden Mittel und bei der Brachystochrone die Methoden entwickelt, die für wichtige Klassen Mayerscher bzw. Lagrangescher Probleme die genannten Schritte zu machen gestatten und darüber hinaus Eindeigkeitssätze ergeben. Das Problem b), namentlich der Schritt 2, läßt sich nicht ohne weiteres auf a) zurückführen und wurde u. a. von Cinquini behandelt. Bei c) 3. wird auf eventuell mögliche Weiterführungen der Haarschen Resultate hingewiesen.

E. Hölder (Leipzig).

Tonelli, Leonida: Su alcuni funzionali. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. 18, 1—21 (1939).

Ce travail constitue une première étude du point de vue du calcul des variations des

fonctionnelles de la forme $\int_0^1 \int_0^1 F(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) dx dz$. — L'A. étudie les fonctionnelles

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x, z) y'(x) y'(z) dx dz, \quad (1) \quad \int_0^1 \int_0^1 K(x, z) y'^2(z) y'^2(z) dx dz, \quad (2)$$

et aussi les fonctionnelles

$$\int_0^1 H(x) y'(x) dx + \int_0^1 \int_0^1 K(x, z) y'(x) y'(z) dx dz, \quad (1^*)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x, z) y'^2(x) y'^2(z) dx dz - \left| \int_0^1 P(x) y'(x) dx \right|^\alpha \quad (2^*)$$

avec $0 \leq \alpha < 4$. — Il démontre la semicontinuité des fonctionnelles considérées et

l'existence du minimum. De l'étude de la fonctionnelle (1) l'A. déduit quelques propositions classiques pour les équations intégrales à noyau symétrique.

Basilio Manià (Milano).

Tonelli, Leonida: Su l'esistenza delle estremanti assolute per gli integrali doppi. *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. 8, 161—165 (1939).

Dans un Mémoire publié en 1933 (ce Zbl. 6, 118), l'A. a établi, sous conditions très générales, nombreux théorèmes d'existence du minimum de l'intégrale

$$I_D[z] = \iint_D f\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy.$$

Dans le travail en question il donne des extensions bien remarquables de quelques propositions du Mémoire cité (théorèmes IV, V, VI). On suppose que $I_D[z]$ soit quasi-régulier positif, et on considère des classes des fonctions $\{z(x, y)\}$, avec $z(x, y)$ absolument continue au sens de Tonelli et telle que $I_D[z]$ soit finie, et qui satisfaisent, respectivement, à les mêmes conditions des théorèmes cités, mais on fait des nouvelles hypothèses, plus générales, sur la fonctions $f(x, y, z, p, q)$. — Par exemple, dans le premier théorème l'A. suppose qu'il y ait cinq nombres $\bar{p}, \bar{q}, m > 0, \sigma_1 \geq 2, \sigma_2 \geq 2$, et deux fonctions $\Psi(x, y, z, p, q), \Phi(x, y, z, p, q)$ avec $\Psi(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) \equiv 0, \Phi(x, y, z, p, q) \geq \Phi(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) \equiv g(x, y)$, où $g(x, y)$ est inférieurement bornée en D , de sort que pour chaque (x, y) de D et pour tous les z, p, q , soit vérifiée l'inégalité

$$m\{|p - \bar{p}|^{\sigma_1} + |q - \bar{q}|^{\sigma_2}\} + \Phi(x, y, z, p, q) \leq F(x, y, z, p, q) \leq \Psi(x, y, z, p, q) + \Phi(x, y, z, p, q). \quad S. Cinquini. (Pavia).$$

Cimmino, Gianfranco: Aggiunta alla nota: Sulle estremanti degli integrali doppi in forma ordinaria. (Questi rendiconti, Vol. 8, pp. 110—119.) *Rend. Semin. mat. Univ. Padova* 9, 140—141 (1938).

L'A. comunica numerose correzioni ad una sua precedente Nota (questo Zbl. 19, 124), il cui contenuto dava adito a molteplici e notevoli obiezioni. Inoltre l'A. riconosce che il risultato da lui conseguito è contenuto in un precedente lavoro di Morrey (questo Zbl. 18, 405), il quale, peraltro, aveva seguito un procedimento esatto. *S. Cinquini*.

● **Seifert, H., und W. Threlfall:** Variationsrechnung im Großen (Morsesche Theorie). (*Hamburg. Math. Einzelschriften H. 24.*) Leipzig: B. G. Teubner 1938. 115 S. u. 25 Abb. RM. 8.—

Die Schrift gibt eine freie Darstellung der von Marston Morse entwickelten Theorie der Variationsrechnung im Großen. Im Vordergrund stehen die topologischen Begriffsbildungen und Methoden, während die analytischen Anwendungen zurücktreten. Größtmögliche Umsicht in Anordnung und Auswahl des Gebotenen ermöglicht einen Aufbau auf knappstem Raum, ohne daß im einzelnen auf ausführliche Klarheit und peinliche Sauberkeit verzichtet wird. Aus Gründen der Raumersparnis wird nur das Problem der geodätischen Linien, nicht das allgemeine positive positivreguläre Variationsproblem behandelt; ebenso werden die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gelegentlich schärfer als notwendig gefaßt, wenn dadurch Vereinfachungen eintreten. Die mit besonderer Liebe ausgefeilte Darstellung hält durchgehend die rechte Mitte zwischen einer prolixitas phrasium und einer concisa brevisitas und ermöglicht auch Fernerstehenden ein schnelles Eindringen in diese schöne und weittragende Theorie. Eine ausführliche Einleitung skizziert in geometrisch anschaulicher Weise den Gedankengang, zahlreiche Beispiele, Abbildungen und Anmerkungen dienen der Bequemlichkeit des Lesers.

Das 1. Kapitel enthält nach einer kurzen Einführung in die Homologietheorie mod 2 eines Umgebungsraumes Ω , und zwar unter Einschluß der Lefschetz'schen Relativzyklen, die Definition der Typenzahlen $m^k(\alpha)$ eines Wertes α einer stetigen Funktion J auf Ω . Auf Grund eines Axiomes I, welches die Existenz der „unteren Homologiegrenze“ eines Zyklus sichert, folgen die Morseschen Ungleichungen $M^k \geq R^k$ für die Summe M^k aller k -ten Typenzahlen von J und die Zusammenhangszahlen R^k von Ω . Auf Grund eines Axiomes II über die „obere Homologiegrenze“ eines berandenden Zyklus ergibt sich für spezielle Fälle sogar die Gültigkeit

des Gleichheitszeichens. — Im 2. Kapitel folgen Betrachtungen im kleinen. Für zweimal stetig differenzierbare Funktionen J in einem euklidischen \mathbb{R}^n werden in analoger Weise die Typenzahlen $m^k(g)$ eines isolierten stationären Punktes g definiert. Wenn die zugehörige quadratische Form nicht ausgeartet ist, sind sie allein durch deren Trägheitsindex bestimmt. Im allgemeinen Fall erweisen sie sich als endlich und nur für endlich viele k als von Null verschieden (Endlichkeitssatz). — Das 3. Kapitel behandelt die auf einer geschlossenen, dreimal stetig differenzierbaren n -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit \mathbb{M}^n stückweise glatten Kurven, welche von einem festen Punkt A zu einem anderen B laufen. Ihre Gesamtheit bildet bei geeigneter Entfernungsdefinition einen metrischen Raum Ω , auf dem die Bogenlänge J eine stetige Funktion ist. In Ω lassen sich, analog wie in einem endlichdimensionalen Raum, Typenzahlen $m^k(g)$ erklären, und durch eine einfache Zurückführung auf diesen Fall ergibt sich, daß auch für eine isolierte geodätische Linie g von A nach B , also einen isolierten stationären Punkt g von Ω , der Endlichkeitssatz gilt. Wenn unterhalb jedes beliebigen J -Wertes nur endlich viele stationäre Punkte liegen, so ist die zum stationären Werte γ gehörige Typenzahl $m^k(\gamma)$ gleich der Summe der k -ten Typenzahlen aller stationären Punkte vom Werte γ ; ferner gelten die Axiome I und II. Daraus folgen nach dem 1. Kapitel die Morseschen Ungleichungen $M^k \geq R^k$. Wenn also Ω unendlichen Zusammenhang (d. h. eine unendliche Summe der Zusammenhangszahlen) hat, so gibt es infolge des Endlichkeitssatzes unendlich viele Geodätische zwischen A und B (Hauptsatz). — Eine Möglichkeit zur Berechnung der Zusammenhangszahlen R^k ergibt sich unter Umständen auf Grund des Satzes, daß die R^k unabhängig von der Metrik auf \mathbb{M}^n und unabhängig von der Wahl der Randpunkte A und B sind. So kann man für den Fall der n -Sphäre die Typenzahlen M^k direkt berechnen, die Gleichungen $M^k = R^k$ feststellen und daraus auf unendlich hohen Zusammenhang von Ω schließen. Also gibt es auf jeder zur n -Sphäre homomorphen Riemannschen Mannigfaltigkeit zwischen beliebigen festen Randpunkten unendlich viele Geodätische. — Diese Ergebnisse werden auf den Fall beliebiger Randmannigfaltigkeiten verallgemeinert. In einem Anhang werden die schärferen Morseschen Ungleichungen $M^0 \geq R^0$, $M^1 - M^0 \geq R^1 - R^0$, ... auf Grund einer einfachen anschaulichen geometrischen Deutung bewiesen. Das Buch schließt mit einem Hinweis auf das Problem der Mindestzahl stationärer Punkte auf einer geschlossenen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit.

Wolfgang Franz (Gießen).

Funktionentheorie:

Fedoroff, V. S.: Sur les polynômes d'une variable complexe. Rec. math. Moscou, N. s. 4, 459—468 u. franz. Zusammenfassung 469 (1938) [Russisch].

Soit D un domaine ouvert, convexe et borné et soit z_0 un point situé dans l'intérieur ou sur la frontière de D . Désignons par d un segment rectiligne issu du point z_0 . L'aut. démontre pour chaque polynome $f(z)$ de degré n les inégalités

$$\iint_D |f'(z)|^2 d\omega \geq S \frac{|f'(z_0)|^2}{2^{n-2} n^{2n-1} (2n-1)!}, \quad \int_d |f'(z)| |dz| \geq L \frac{|f'(z_0)|^2}{2^{n-1} n^n},$$

où S est la surface de D , $d\omega$ l'élément de surface et L la longueur de d . Dans quelques cas particuliers ces inégalités peuvent être considérablement améliorés regardant le facteur dépendant de n .

N. Obrechhoff (Sofia).

Nehari, Zeev: Une propriété des valeurs moyennes d'une fonction analytique. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1785—1787 (1939).

Sei $f(z)$ regulär in $|z| < 1$. Dann folgt aus der Beschränktheit von $\mu(\varrho, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\varphi})| d\varphi$ für $0 < \varrho < 1$ die Beschränktheit von $\int_{-1}^{+1} |f(\varrho e^{i\varphi})| d\varrho$ für $0 \equiv \varphi < 2\pi$ [Fejér und Riesz, Math. Z. 11, 305 (1921)]. Dieser Satz ist als solcher nicht umkehrbar. Dagegen beweist Verf. folgendes: Ist $f(0) = 0$ und $\int_0^1 |f(\varrho e^{i\varphi})| d\varrho \equiv 1$ für $0 \equiv \varphi < 2\pi$, so gilt $\mu(\varrho, f) \equiv 1$ für $0 < \varrho \equiv \frac{1}{2}$. Der Kern des Sachverhaltes liegt in der Konvexität von $\mu(\varrho, f)$.

Pfluger (Freiburg, Schweiz).

Calugaréano, Georges: Sur certaine forme bilinéaire intégrro-différentielle. C. R. Acad. Sci. Roum. 3, 119—121 (1939).

Ist $f(z)$ eine eindeutige analytische Funktion, die in z_0 regulär ist, und bezeichnet man mit $f^{(k)}(z)$, bei negativem k , das über die geradlinige Strecke (z_0, z) erstreckte Inte-

gral $\frac{1}{(k-1)!} \int_{z_0}^z (z-z_0)^{k-1} f(z) dz$, so ist die Reihe $I_m = \frac{1}{2} [f^{(m)}(z)]^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f^{(m+n)}(z) f^{(m-n)}(z)$

in einem gewissen vom Verf. bestimmten Gebiete gleichmäßig konvergent und nur von z_0 , nicht aber von z abhängig.

G. Cimmino (Cagliari).

Robertson, M. S.: On certain power series having infinitely many zero coefficients. *Ann. of Math.*, II. s. 40, 339—352 (1939).

For functions $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ regular for $|z| < 1$ and real on and only on the real axis satisfying $a_n = 0$, $n \equiv 0 \pmod{p}$, then $|a_n| < A(p)$ for all n if p is odd, and for all even n if p is even. For $p=3$ $|f(z)| \leq 4|z|/\sqrt{3}(1-|z|^2)$. *Macintyre*.

Rosenblatt, Alfred: Sur les coefficients des séries univalentes dans le cercle unité. *Bull. Soc. math. Grèce* 19, 127—128 (1939).

Rosenblatt, Alfred: Sur les coefficients des fonctions univalentes dans le cercle unité. *Rev. Ci., Lima* 40, 541—545 (1938).

Rosenblatt, Alfred: Nouvelles recherches sur les coefficients des séries univalentes. *Rev. Ci., Lima* 40, 547—553 (1938).

Vgl. dies. Zbl. 20, 141. Verf. setzt die numerische Auswertung elementarer Koeffizientenbeziehungen fort und gewinnt — Bezeichnungen wie l. c. — in der dritten Note $|b_7| < 1,1429$, $|a_4| < 4,2858$, $|a_5| < 5,9158$, $|a_6| < 8,3158$, in den vorhergehenden Noten z. T. etwas weniger. *Ulrich* (Gießen).

Joh, Kenzo: Theorems on „schlicht“ functions. III. *Proc. phys.-math. Soc. Jap.*, III. s. 21, 191—208 (1939).

Using the differential equation due to Löwner [*Math. Ann.* 89, 103—121 (1923)] a number of results relating to univalent functions are proved (cf. Golusin, this Zbl. 14, 221; Basilewitsch, this Zbl. 15, 71). The Verzerrungssatz for bounded functions [Pick, S.-B. Akad. Wiss. Wien 126, 1—17 (1917)] is proved and this and the Drehungssatz (Grunsky, this Zbl. 5, 362) are applied to $f(z_1) - f(z_2)$ [Szegő, *Math. Ann.* 100, 188—211 (1928)]. From these applications are obtained results on the univalence of sections of the power series of a univalent function. Thus if $z + a_3 z^3 + \dots$ is univalent in $|z| < 1$ every section (with one possible exception) is univalent in $|z| < 1/\sqrt{3}$. If $z + a_2 z^2 + \dots$ is univalent in $|z| < 1$ and the a_n satisfy $|a_n| \leq 1$, then all sections are univalent in $|z| < \tau$ ($e^{-1} < \tau < \frac{1}{2}$) [cf. Joh, this Zbl. 17, 408; Kobosi, *Kyoto Imp. Univ.* 14, 251—262 (1931)]. *Macintyre* (Aberdeen).

Gachow, F.: Lineare Randwertaufgaben der komplexen Funktionentheorie. *Bull. Soc. phys.-math. Kazan*, III. s. 10, 39—77 u. dtsh. Zusammenfassung 77—79 (1938) [Russisch].

L'auteur traite par la théorie de Fredholm quelques problèmes aux limites relatifs à une Courbe de Jordan rectifiable C : 1° On cherche deux fonctions holomorphes respectivement à l'intérieur et à l'extérieur qui satisfassent sur C à une relation linéaire dont les coefficients sont höldériens donnés. 2° Extension à deux systèmes de n fonctions satisfaisant à n relations analogues. 3° On cherche une fonction holomorphe dans C dont les parties réelle et imaginaire et leurs dérivées des n 1^{ers} ordres satisfont à une certaine relation linéaire sur C . 4° Extension à n fonctions dont les parties réelles et imaginaires satisfont sur C à n relations linéaires. *Brelot* (Bordeaux).

Unkelbach, Helmut: Über den Vorrat analytischer Funktionen an großen Funktionswerten. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* 49, Abt. 1, 38—49 (1939).

Verf. teilt folgende Resultate über konforme Abbildung mit: Wird der Kreis $|z| \leq R$ umkehrbar eindeutig auf einen konvexen Bereich \mathfrak{B} abgebildet, wobei der Bildpunkt M des Kreismittelpunktes um weniger als 1 vom Rande des Bereiches \mathfrak{B} entfernt ist, so ist das Lebesguesche Maß derjenigen Punkte der Kreisperipherie $|z| = R$, deren Bilder außerhalb des Kreises vom Radius R um M liegen, kleiner als 8. Dies gilt, wie groß auch R gewählt werde. Ähnliche Resultate für sternartige und allgemeinere Bildbereiche. *Pfluger* (Freiburg, Schweiz).

Ahlfors, Lars V.: Zur Uniformisierungstheorie. (*Helsingfors*, 23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 235—248 (1939).

Zur Lösung des Dirichlet-Neumannschen Problems entwickelt Verf. eine einfache Methode, die als eine Variante der Balayagemethode anzusehen ist und u. a. den Vorzug hat, die gesuchte Funktion direkt als eine Grenze einer monotonen Folge approximierender Funktionen zu liefern. Als Anwendung folgt ein durchsichtiger Beweis des Parallelschlitztheorems.

Rolf Nevanlinna (Helsinki).

Jørgensen, Vilhelm: Sur une nouvelle propriété d'extrémum de la fonction modulaire. (*Helsingfors*, 23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 273—276 (1939).

Sei $f(s)$ eine reguläre, von 0, 1 verschiedene analytische Funktion für $\sigma > 0$ ($s = \sigma + it$), so daß $\log |f(s)| : \sigma$ eine positive untere Grenze hat, wenn s eine Punktfolge durchläuft, welche in Winkelannäherung gegen den Randpunkt $s = \infty$ konvergiert. Mit Hilfe der Modulfunktion $v(s)$, welche die Halbebene $\sigma > 0$ auf die universelle Überlagerungsfläche der in 0, 1, ∞ punktierten Vollebene abbildet, und unter Benutzung des Julia-Caratheodoryschen Satzes über die Randableitung wird gezeigt: 1. $\log f(s) : s$ strebt gegen eine Grenze $c > 0$ bei Winkelannäherung $s \rightarrow \infty$; 2. Der Wertvorrat von $f(s)$ für $\sigma \geq \alpha > 0$ ist enthalten im Wertvorrat von $v(s)$ für $\sigma \geq c\alpha$.

Rolf Nevanlinna (Helsinki).

Selberg, Henrik L.: Über einen Darstellungssatz aus der Theorie der meromorphen Funktionen. (*Helsingfors*, 23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 62—66 (1939).

On introduit pour les fonctions algébroides méromorphes $u(z)$ d'ordre k des fonctions N et T analogues à celles qui interviennent dans la théorie des fonctions uni-

formes. L'auteur introduit en outre les fonctions $N_\tau(r, a) = \frac{1}{k} \int_1^r n_\tau(t, a) d \log t$,

où $n_\tau(t, a)$ est le nombre de racines de $u(z) - a$, de multiplicité inférieure à τ , dans le cercle $|z| < t$. Si, pour une valeur de τ , $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_\tau(r, a)}{T(r, u)} = 0$ (*), on dit que a est une singularité typique pour les multiplicités $< \tau$, d'indice $\theta(a) = 1 - \frac{1}{\tau(a)}$, où $\tau(a)$ est le plus grand nombre pour lequel (*) est vrai. On montre que $\sum \theta(a) \leq 2k$. L'auteur étudie certaines fonctions pour lesquelles on a $\sum \theta(a) = 2k$ ($k = 2$, et $u(z)$ a 5 singularités typiques avec $\theta = 1, 1, 1, 1/2, 1/2$), puis il met le résultat en relation avec la théorie des combinaisons linéaires de fonctions méromorphes linéairement indépendantes.

Charles Blanc (Lausanne).

Thorin, G. O.: An extension of a convexity theorem due to M. Riesz. *Fysiogr. Sällsk. Lund Förh.* 8, 166—170 (1939).

If $M(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ is the maximum modulus of the holomorphic function $f(z_1, z_2, \dots, z_r)$ when the "point" $(|z_1|^{1/\alpha_1}, \dots, |z_r|^{1/\alpha_r})$ lies in a fixed bounded domain k , then $\log M(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ is a convex function of $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ for $\alpha_r \geq 0$, and for all α_r if k is bounded away from the origin. The theorem is proved by considering the behaviour of f near its maximum modulus (giving incidentally a new proof of Hadamard's three circle theorem). In Riesz's statement [*Acta math.* 49, 465—497 (1926), Paley, *J. London Math. Soc.* 6, 226—230 (1931); this *Zbl.* 2, 179] f is restricted to be a bilinear form.

Macintyre (Aberdeen).

Wachs, Sylvain: Sur les transformations pseudo-conformes admettant un point frontière invariant. *C. R. Acad. Sci., Paris* 208, 1385—1387 (1939).

Über die vom Verf. betrachteten Bereiche \mathfrak{B} wird u. a. vorausgesetzt, daß zu ihrem Rande eine analytische Hyperfläche \mathfrak{F} gehört. Q sei ein Punkt auf \mathfrak{F} . Nunmehr werden die analytischen Abbildungen von \mathfrak{B} auf in ihnen liegende Bereiche betrachtet, bei denen Q festbleibt. Unter Benutzung von Vergleichskörpern, die \mathfrak{B} in Q von außen bzw. innen berühren, werden Untersuchungen über die Abbildung der Nachbarschaft von Q angestellt (s. auch dies. *Zbl.* 18, 370).

Behnke (Münster).